МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
филиал в г. Славянске-на-Кубани

Факультет математики, информатики и технологии

специальность 050201.65 «Математика»
с дополнительной специальностью
050202.65 «Информатика»

кафедра математики, информатики и МП

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Комбинаторика и вероятность на уроках математики в средней общеобразовательной школе

Выполнила:
студентка 5 курса
группы Д-07-М
Овсянник Светлана
Викторовна

____
(подпись)

Научный руководитель:
к. п. н., доцент
Радченко Светлана
Александровна

____
(подпись)

Славянск-на-Кубани
2012

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

На современном этапе развития общества, когда в нашу жизнь стремительно вошли референдумы и социологические опросы, кредиты и страховые полисы, разнообразные банковские начисления и т.п., становится очевидной необходимость включения в школьный курс математики материала по комбинаторике и теории вероятностей.

Тема выпускной квалификационной работы актуальна в связи с тем, что современные школьники стали более развиты, и им требуются не просто задачи на вычисление, а задачи, требующие в своем решении участия логического мышления, а также задачи, наиболее приближенные к жизненным ситуациям. Такими задачами и являются комбинаторные и теоретико-вероятностные задачи. Однако тема сложна для восприятия, так как, отходит от строго детерминированных понятий.

Объектом исследования является процесс обучения математике в средней общеобразовательной школе.

Предметом исследования является методика формирования представления о взаимосвязи комбинаторики и вероятности в основной школе.

Цель данной работы: разработать методику обучения темы «Комбинаторика и вероятность » и создать электронное учебно-методическое пособие по этой теме.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи:**

1) изучить и проанализировать учебно-методическую, психолого-педагогическую, учебную литературу по теме работы;

2) провести анализ заданий, содержащих элементы комбинаторики и теории вероятностей, в Едином Государственном Экзамене;

3) исследовать психолого-педагогические аспекты, изучения комбинаторики и вероятности;

4) разработать тематическое планирование по теме «Комбинаторика и вероятность»;

5) разработать методические рекомендации по теме «Комбинаторика и вероятность»;

6) разработать уроки по теме «Комбинаторика и вероятность»;

7) создать учебно-методическое электронное пособие по теме исследования.

Для достижения цели и поставленных задач использовались следующие **методы** исследования:

1) изучение и анализ психолого-педагогической, научно-методической, математической литературы по теме исследования;

2) теоретический анализ изучения литературы с целью разработки и формирования методических рекомендаций по изучению темы «Комбинаторика и вероятность»;

3) обобщение и систематизация материала по данной теме.

Практическая значимость работы состоит в том, что:

1) в соответствии с психолого-педагогическими особенностями учеников 10-11 классов даны методические рекомендации для учителей средней школы по теме: «Комбинаторика и вероятность»;

2) создано тематическое планирование и разработаны занятия по теме «Комбинаторика и вероятность».

Результаты могут использоваться как учителями средних школ, так и студентами при самостоятельной подготовке к практическим занятиям по методике преподавания математики.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, основной части (трех параграфов), заключения, списка литературы и приложения.

§1.Анализ учебно-методической литературы по теме «Комбинаторика и вероятность»

1.1.Анализ нормативных документов

Изучение элементов комбинаторики, статистики и теории вероятностей в основной и старшей школе стало обязательным после утверждения федерального компонента государственного образовательного стандарта 2004 года и базисного учебного плана 2004 года. Конкретизация содержания этого раздела, и примерное распределение учебных часов приведены в примерных программах.

На практике преподавание данного раздела зачастую не отвечает требованиям стандарта. Причин здесь несколько.

1) До сих пор нет однозначного подхода к преподаванию вероятностно-статистической линии в общеобразовательной школе. Авторы учебников излагают учебный материал по-разному. Содержание и формулировки тем в некоторых УМК не соответствует действующему стандарту. Например, такое несоответствие есть в учебнике «Математика» А. Г. Мордковича (10–11класс) 2009 года издания.

2) Существует серьезное расхождение в количестве часов, рекомендуемых на изучение вероятностно-статистической линии между примерной программой и авторскими тематическими планами, что влияет на качество усвоения материала. Тематическое планирование к выше названному учебнику «Математика» А.Г. Мордковича серьезно расходится по количеству часов, отводимых на изучение стохастики, с примерной программой.

3) До последнего времени при проведении итоговой аттестации обучающихся задания по разделу «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей» отсутствовали в КИМах, поэтому на практике изучение данного учебного материала проводилось по остаточному принципу. В 2010 году задачи вероятностно-статистической линии были включены в экспериментальном порядке в КИМы Государственной итоговой аттестации за курс математики в 9 классе. Анализ результатов ГИА и репетиционных экзаменационных испытаний показал, что по сравнению с другими практико-ориентированными заданиями по темам, подвергнутым контролю, задания этого раздела были выполнены хуже всего. Необходимо отметить, что в 2011 году проверка подготовки обучающихся по вероятностно-статистической линии входит в качестве обязательного экзаменационного материала за курс основной школы. В кодификаторе требований к уровню подготовки выпускников по математике в 2012 году указано, что выпускник должен уметь:

- работать со статистической информацией;
- находить частоту и вероятность случайных событий;
- решать комбинаторные задачи;
- сравнивать шансы, оценивать вероятность.

Основное общее образование

Элементы статистики и теории вероятностей

Статистические данные. Представление данных в виде таблиц, диаграмм, графиков. Средние результатов измерений. Понятие о статистическом выводе на основе выборки. Понятие и примеры случайных событий.[2]

Вероятность. Частота события, вероятность. Равновозможные события и подсчет их вероятности. Представление о геометрической вероятности.[2]

Требования к уровню подготовки выпускников

В результате изучения математики ученик должен *знать/понимать*

- вероятностный характер многих закономерностей окружающего мира;
- примеры статистических закономерностей и выводов;

уметь

- находить частоту события, используя собственные наблюдения и готовые статистические данные;
- находить вероятности случайных событий в простейших случаях;
- *использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для:*
- сравнения шансов наступления случайных событий, оценки вероятности случайного события в практических ситуациях, сопоставления модели с реальной ситуацией;
- понимания статистических утверждений.[2]

Среднее (полное) общее образование

Базовый уровень

Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей

Элементарные и сложные события. Рассмотрение случаев и вероятность суммы несовместных событий, вероятность противоположного события. Понятие о независимости событий. Вероятность и статистическая частота наступления события. Решение практических задач с применением вероятностных методов.[1]

Требования к уровню подготовки выпускников

уметь

- вычислять в простейших случаях вероятности событий на основе подсчета числа исходов;

использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для:

- анализа реальных числовых данных, представленных в виде диаграмм, графиков;

- анализа информации статистического характера;[1]

1.2. Анализ заданий, содержащих элементы комбинаторики и вероятности в Едином Государственном Экзамене по математике

Элементы, комбинаторики и теории вероятностей стали обязательным компонентом школьного образования, усиливающим его прикладное и практическое значение. Этот материал необходим, прежде всего, для формирования функциональной грамотности — умений воспринимать и анализировать информацию, представленную в различных формах, понимать вероятностный характер многих реальных зависимостей, производить простейшие вероятностные расчеты.[2]

Задача B10 Единого Государственного Экзамена проверяет следующую компетентность выпускника средней школы:

- умение воспринимать и анализировать информацию, представленную в различных формах;

- понимать вероятностный характер многих реальных зависимостей;

- производить простейшие вероятностные расчеты.[2]

Изучение основ комбинаторики позволяет учащемуся осуществлять рассмотрение случаев, перебор и подсчет числа вариантов, в том числе в простейших прикладных задачах.

В задачах по теории вероятностей и комбинаторике, учащийся размышляет, разрабатывает свою логику, что необходимо ему при сдаче экзамена, при поступлении в вуз, и в жизни. В задаче B10 контролируется умение учащегося мыслить логически, выбрать нужную формулу для той или иной задачи.[2]

Задания даются такие:

Задание 1.

Тип задания. Задание на логическое мышление.

Характеристика задания. Текстовое задание, моделирующее реальную или близкую к реальной ситуацию.

Комментарий. По условию задачи требуется найти вероятность.

Пример с решением.

Игральный кубик бросают дважды. Найдите вероятность того, что выпадет число очков больше, чем 4.

Решение.

Здесь случайный эксперимент — бросание кубика. Элементарное событие — число на выпавшей грани. Граней всего 6. Перечислим все элементарные события: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Значит $N = 6$. Событию $A = \{$выпало больше, чем 4$\}$; благоприятствуют два элементарных события: 5 и 6.

Поэтому $N(A) = 2$. Элементарные события равновозможны, поскольку подразумевается, что кубик честный. Поэтому $P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Задание 2.

Тип задания. Задание на логическое мышление.

Характеристика задания. Текстовое задание, моделирующее реальную или близкую к реальной ситуацию.

Комментарий. По условию задачи требуется найти вероятность.

Пример с решением.

В случайном эксперименте бросают два игральных кубика. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 8 очков.

Решение.

Элементарный исход в этом опыте-упорядоченная пара чисел.

Первое число выпадает на первом кубике, а второе на втором. Множество элементарных исходов удобно представить таблицей. Строки соответствуют результату первого броска, столбцы-результату второго столбца. Всего элементарных событий $N = 36$.

Напишем в каждой клетке таблицы сумму выпавших очков и закрасим клетки, где сумма равна 8. Таких ячеек 5. Значит событию А=сумма равна 8 благоприятствуют 5 элементарных исходов.

Следовательно $N(A) = 5$. Поэтому $P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{5}{36}$.

Ответ: $\frac{5}{36}$

Составители стараются избегать неясных формулировок и тонких мест: например, необходимо найти вероятность, значит дают определенные числовые данные, либо всем известные значения(например, игральный кубик подбросили два раза, найти вероятность того, что оба раза выпадет четыре очка. Учащийся знает, из школьного курса, что число возможных вариантов в подбрасывании кубика двух раз равно 36. Следуя из этого он размышляет и находит нужное ему решение.) В данном задание проверяется умение учащегося мыслить.[2]

Проверяется не умение работать с тонкостями формального определения, а именно реальное понимание, способность применять знания в практической жизненной ситуации, где таких тонкостей нет.[3]

В задаче B10 используются данные, полученные в результате реальных ситуаций, с которыми школьники сталкиваются ежедневно.

1.3. Анализ школьных учебников по теме: «Комбинаторика и вероятность»

1.3.1. «Алгебра и начала анализа 11 класс» под редакцией С.М. Никольского, М.К. Потапова, Н.Н. Решетникова, А. В.

Анализируя учебник «Алгебра и начала анализа 11 класс» под редакцией С.М. Никольского, М.К. Потапова, Н.Н. Решетникова, А. В. Шевкина нужно отметить, что учебник предназначен для преподавания алгебры и начал анализа в 11 классах для учащихся общеобразовательных учреждений.

Учебник рассчитан на изучение математики базового уровня. Подходит для тех профилей, где алгебра не является определяющим предметом будущей профессии.

В учебнике есть целая глава посвященная элементам теории вероятности. Это является важным моментом, так как изучение данной темы начинается в 10 классе. Глава содержит 7 параграфов и на изучение данной главы отводится 7 часов. Данная глава в учебнике является дополнительной.

Изложение материала в учебнике дается подробно и обстоятельно. В тексте приведено много примеров с подробными решениями, что облегчает усвоение материала. Определения и теоремы даются на строгом математическом языке. Несмотря на то, как представлена тема, перед каждым понятием дается подробное разъяснение на понятном и доступном для учеников языке.

В учебнике много разобранных примеров с подробным анализом каждого действия.[4]

1.3.2. «Алгебра и начало анализа» под редакцией А.Г.Мордковича, П.В.Семенова 10–11 класс

Учебник «Алгебра и начало анализа» под редакцией А.Г.Мордковича, П.В.Семенова 11 класс в двух частях предназначен для общеобразовательных учреждений(профильный уровень). Данный учебник является аналогичным продолжением учебника 10 класса.

Теме «Элементы теории вероятностей и математической статистики» посвящена глава 5 учебника, содержащая 4 параграфа, в которых подробно рассматривается данная тема.

Изложение материала дается подробно и обстоятельно. Во многих случаях материал, который содержится в параграфе, сложно успеть полностью изучить на уроке, но это и не нужно, поскольку данная книга предназначена в первую очередь для неспешного домашнего чтения и изучения школьниками. В тексте приведено немало примеров с подробными решениями.[5]

1.3.3. «Алгебра и начало анализа 10 – 11 классы» под редакцией Алимова А.Ш., Колягина Ю.М.

Башмаков М.И и «Алгебра и начала математического анализа 10–11 класс» Колмогоров А.Н. Рассматривая содержание учебника «Алгебра и начала анализа 10–11 классы» под редакцией Алимова А.Ш, Колягина Ю.М. можно заметить весомое отличие от содержания предыдущих учебников. Если в учебниках С.М. Никольского и Мордковича А.Г. рассматривались хотя бы основы элементов теории вероятности, комбинаторики и математической статистики, то здесь вообще отсутствует какой-либо материал связанный с данной темой.

Подобно Алимову поступили так же такие авторы как Башмаков М.И «Алгебра и начала анализа. Учебник для 10–11 классов», Колмогоров А.Н «Алгебра и начала математического анализа. Учебник для 10–11 классы».

Исходя из всего вышесказанного, разработку уроков будет целесообразнее составить с привлечением дополнительной методической литературы, так как материал в школьных учебниках либо отсутствует, либо присутствует в недостаточном объеме.

§2. Методические рекомендации по теме «Комбинаторика и вероятность»

2.1. Психолого-педагогические аспекты изучения комбинаторики и вероятности в средней школе

Исследование психологов (Ж.Пиаже, Е. Фишбейн) показывают, что человек изначально плохо приспособлен к вероятностной оценке, к осознанию и верной интерпретации вероятностно-статистической информации. Исследования недвусмысленно говорят о том, что даже хорошее знание и понимание других разделов математики само по себе не обеспечивает развитие вероятностного мышления и не избавляет даже от тривиальных вероятностных предрассудков и заблуждений.[6]

Приведем один **пример**. Учащимся задавали вопрос:

На одной карточке спортлото (6 из 49) зачеркнуты номера

1, 2, 3, 4, 5 и 6,

а на другой

5, 12, 17, 23, 35 и 41.

Как вы думаете, выигрыш какого набора чисел более вероятен?

Из всех участников эксперимента 22 процента старшеклассников ответили, что вероятнее второй карточки. Интересен практически одинаковый ответ двух школьников разных школ: Вообще-то оба случая равновероятны, но второй случай более вероятен, выражающий очевидное противоречие между бытовыми и научными представлениями школьников.[1]

Любопытно, что профильные химико-биологические экономические классы, где курс математики существенно глубже базового, но отсутствует вероятностно-статистический материал, дают почти такой же результат (до 30 процентов ответов — выигрыш второго набора более вероятен).[1] Не сильно отличаются от приведенных данных и результаты ответов на аналогичный вопрос в тесте, предложенном в 2001 году учителям математики на курсах повышения квалификации в Москве.[6]

Отметим кстати, что известный любитель математических игр и парадоксов Мартин Гарднер по аналогичному поводу написал, что на самом деле выгодней вычеркивать комбинации 1, 2, 3, 4, 5 и 6 или другую же регулярную комбинацию. Шансы на выигрыш те же, а вот сумма при выигрыше может оказаться существенно больше, так как едва ли кому-то придет в голову зачеркнут номера порядка с 1 по 6, и потому в случае удачи не придется ни с кем делить призовой фонд.[6]

Е. А. Бунимовичем была проведена экспериментальная работа по преподаванию начальных основ вероятности в разных возрастных группах: в 9–11 классах на занятиях развития творческих способностей; в 5–6, 8–9 и 10–11 — на уроках математики.[6]

Опыт показал, что в возрасте начальных классов еще многое в представлениях учеников о мире недостаточно сформировано, не хватает и математического аппарата (прежде всего — простых дробей) для объяснений представлений о вероятности. В то же время основы описательной статистики, таблицы и столбчатые диаграммы, а также основы комбинаторики, систематический перебор возможных вариантов на небольшом множестве предметов возможно и даже необходимо вводить в курс начальной школы .[6]

Одновременно было обнаружено, что начинать изложение основ теории вероятностей в старших классах — малоэффективно. Наработанное к этому возрасту стремление к быстрой формализации знаний, сформированное традиционным курсом математики, желание усвоить на уроке прежде всего некоторый набор правил, алгоритмов и методов вычисления фактически заменяет формирование вероятностных представлений формальным выучиванием формул комбинаторики и вычисления вероятности по классической модели Лапласа.[1]

В тоже время, как уже было сказано, обсуждение на качественном уровне вероятностных ситуаций с учащимися старших математических классов, усвоившими достаточно формальный курс основ теории вероятностей, показывает, сколько мало знание формул комбинаторики и классической вероятностной модели способствует развитию вероятностной интуиции изживанию традиционных вероятностных предрассудков.[7]

Как известно, опыт преподавания основ теории вероятностей в школе в период реформы математического образования 60–70 гг. на абстрактно-формальном уровне, в традиционной схеме урока дал в основном негативный результаты и привел к изъятию этого материала из школьной программы. Материал оказался сложен, формален, плохо усваивался .[7]

Экспериментальная работа в 9 и 11 классах по пропедевтики вероятностных представлений, проведению экспериментов со случайными исходами и обсуждению на качественном уровне их результатов показал, что этот незакрепленный формальными обязательными результатами период дает хорошее развитие вероятностной интуиции и статистических представлений ребят.[1] С элементами статистического мышления необходимо начинать знакомить в школе в ряде предметов, а не только в курсе математики. Нужно сделать так, чтобы на уроках ботаники и зоологии, астрономии и физики, русского языка и истории время от времени в нужном месте были сделаны разумные замечания о случайности явлений, которые изучает данная научная дисциплина. Естественно, что математика при этом не может оставаться в стороне.[7]

В быту и на работе выпускник средней школы постоянно сталкивается с необходимостью получения и оформление некоторых сведений. На уроках физики, химии, биологии при выполнении лабораторных и практических работ ученик должен уметь оформить результаты наблюдения и опытов; на уроках географии истории, обществоведения ему необходимо пользоваться таблицами и справочниками, воспринимать информацию, представленную в графической форме. Эти умения необходимы каждому человеку, т. к. со статистическим материалом, представленном в различной форме, он постоянно встречается во всех источниках информации, рассчитанных на массовую аудиторию, — в газетах, журналах, книгах, по телевидению и т. п.[7]

Типические черты изучаемых явлений, их общие тенденции могут быть выявлены с помощью средних вероятностных характеристик. Умение пользоваться ими характеризует наличие у учащегося представлений, связанных с центральными тенденциями в мире случайного. Понимание смысла самых простых средних показателей, таких, как среднее арифметическое, необходимо каждому ученику.[6]

Вероятностный характер окружающих явлений не может быть раскрыт без понимания степени изменчивости. Поэтому возникает необходимость в количественной оценке разброса статистических данных, которая способствует более глубокому пониманию сущности явлений и процессов, дает возможность сравнивать вероятностные совокупности по степени их вариации.[6]

Одним из важнейших компонентов вероятностного мышления является понимание устойчивого в мире случайностей, упорядоченности случайных фактов. Нельзя допустить, чтобы стихийно воспринимаемые в жизни отдельные стороны случайных явлений учащиеся воспринимали вне всяких взаимосвязей. Центральное место занимают здесь представления, связанные с различными экспериментальными представлениями закона больших чисел. [7]Самый простой и доступный путь состоит в формировании представлений о вероятности как о теоретически ожидаемом значении частоты при увеличении числа наблюдений. При этом понимание взаимоотношения между вероятностью и ее эмпирическим прообразом - частотой приводит осознанию статистической устойчивости частоты. В то же время важную роль играет и понимание того, что количественная оценка возможности наступления некоторого события может быть осуществлена до проведения эксперимента, исходя из некоторых теоретических соображений. Таким образом, приходим к вычислению вероятностей в классической схеме.[6]

В том случае, когда при обучении математике вероятностная интуиция не развивается, вместо верных представлений и концепций учащимися усваиваются ложные взгляды, они высказывают ошибочные суждения.[7]

Одной из важных целей изучения вероятностно-статистического материала в школе является развитие вероятностной интуиции, формирование адекватных представлений о свойствах случайных явлений. Ведь в жизни очень часто приходится осуществлять оценку шансов, выдвигать гипотезы и предложения, прогнозировать развитие ситуации, рассуждать о возможностях подтверждения той или иной гипотезы и т. п. представление о вероятности, которое усвоено в процессе организованного, систематического изучения, отличается от обыденного, житейского именно тем, что оно является носителем представлений об устойчивости, закономерности в мире случайного, позволяет наиболее полно и правильно делать выводы из имеющейся информации.[7]

Отметим при этом, что равно неэффективны и даже опасны как ранняя формализация, так и другая крайность, получившая сейчас отражение в некоторых экспериментальных программах — бесконечные рассуждения о вероятности вне курса математики, вне построения вероятностных моделей.[8]

2.2. Тематическое поурочное планирование по теме «Комбинаторика и вероятность»

Одной из главных задач методики обучения школьников темы «Комбинаторика и вероятность» на уроках математики является разработка календарно-тематического планирования и системы уроков по учебнику А.Г.Мордковича «Алгебра и начало математического анализа 10–11 классов».

Тематическое планирование:

Кол-во уроков	**Содержание учебного материала**
2	Простейшие вероятностные задачи
2	Размещения и сочетания
1	Формула бинома Ньютона
1	Связь элементов комбинаторики и вероятности
1	Итоговая контрольная работа по теме: «Элементы комбинаторики и начала теории вероятностей»

Целью проведения данных уроков является: научить учащихся решать комбинаторно-вероятностные задачи, мыслить логически. Подготовить выпускников школы к сдаче ЕГЭ. Также одной из целей таких уроков является умение использовать приобретенные в практической деятельности и повседневной жизни.[9]

2.3. Общий подход к преподаванию элементов теории вероятностей и комбинаторики в школе

Теория вероятностей и математическая статистика сформировались в научные дисциплины позже большинства других разделов математики. Однако осознание важности этих разделов математики в самых различных областях человеческой деятельности в середине прошлого века поставило во многих развитых странах вопрос о включении элементов этих дисциплин в школьную программу. В России этот вопрос начал обсуждаться еще раньше. Еще в 1914 году он рассматривался на заседании секции математики Российской академии наук, рекомендовавшей включение элементов теории вероятности и статистики в школьные программы.

В настоящее время теория вероятности входит в качестве обязательной дисциплины в учебные планы подготовки специалистов практически всех естественнонаучных, технических и гуманитарных дисциплин в высших учебных заведениях.[8]

Используют следующие положения при разработке общего подхода к преподаванию статистики и теории вероятностей в школе:

- дать законченное элементарное представление о теории вероятностей и статистике и их тесной взаимосвязи;

- подчеркивать тесную связь этих разделов математики с окружающим миром, как на стадии введения математических понятий, так и на стадии использования полученных результатов;

- избегать излишнего математического формализма;

- избегать утративших свою актуальность для общества примеров и задач, в том числе задач из азартных игр;

- иллюстрировать материал яркими, доступными и запоминающимися примерами.[9]

Знакомство с элементами теории вероятностей начинают с изложения на интуитивном уровне понятий случайного события и его вероятности. На этом этапе не связывают эти вопросы с комбинаторикой как таковой, не делают первостепенного упора на комбинаторику, как это часто делается в так называемой схеме классической теории вероятностей. Последнее является ненужной данью истории, резко сужает круг задач и вопросов, доступных для рассмотрения, отрывает базовые понятия теории вероятностей от их действительного использования на практике. Учащиеся должны знать и понимать, что основным способом определения вероятности события в содержательных примерах на практике является частотный подход, но что порой определение вероятности события — это довольно сложная или даже неразрешимая задача.[13]

Переходя далее к математическому описанию случайных явлений, обращают особое внимание на понятие случайного опыта и на его важности для всей последующей математической формализации случайности. Ровно так, как условие текстовой математической задачи (например, на движение) задает для учащегося тот набор условий и ограничений, в которых он будет искать решение, так и описание случайного опыта подводит нас к выбору подходящего набора (пространства) элементарных событий и заданию на нем вероятностей выбранных элементарных событий. Эта мысль важна еще и потому, что во многих внешне простых формулировках занимательных вероятностных задач четко не говорится о том, что в них следует понимать под случайным опытом. Это не раз в истории развития теории вероятностей приводило к длительным спорам и математическим парадоксам. Такого рода задачи, как показывает практика обучения, отвлекает и путает учащихся, порождает в них неуверенность в собственных силах и сомнения в применимости вероятностных моделей вообще.[13]

На этапе первичного знакомства с основными вероятностными понятиями следует всячески избегать нечетких формулировок в вероятностных задачах, следя за тем, чтобы бы условия случайного опыта формулировались ясно и недвусмысленно.[14]

Важное место в школьном курсе элементов теории вероятностей занимает понятие равновозможности событий. Исторически оно начало формироваться при решении вероятностных задач, связанных с азартными играми. Однако понятие равновозможности не утратило своей актуальности и в настоящее время. Именно оно лежит в основе простого случайного выбора, на котором базируются все методики организации выборочных исследований, контроля качества продукции и социологических опросов.[17] Однако было бы совершенно неверно ограничиваться в школьном курсе обсуждением только тех случайных опытов, элементарные события в которых равновозможны. Это могло бы привести к формированию у школьников устойчивого ложного представления, что интересующее его случайное событие всегда имеет вероятность, равную одной второй, так как событие либо произойдет, либо не произойдет.[19]

Введение элементов комбинаторики должно быть подчинено вероятностным задачам, а не наоборот. Важно научить учащихся перебору различных комбинаций, подходам к этому перебору, а не доказательства комбинаторных теорем и формальным преобразованиям выражений, включающих число сочетаний или перестановок. Важно показать, что без использования комбинаторных подходов во многих вероятностных задачах трудно описать все элементарные события. Важно дать наглядное, запоминающееся представление о тех практических ситуациях, где используются комбинаторные принципы подсчета.[13]

Сама по себе схема испытаний Бернулли объединяет целый ряд понятий и методов. Это представления о множестве элементарных событий, понятие независимости событий, правило умножения вероятностей, число сочетаний. Таким образом, эта важная тема дает возможность повторить и закрепить многое из уже пройденного материала.[18]

Две важные темы **«Бином Ньютона»** и **«Треугольник Паскаля»** опираются на более высокий уровень формализма в записи выражений. Обращаться к этим темам стоит лишь после того, когда завершено прохождение материала по статистике и теории вероятностей. В этом случае появляется возможность показать, как содержательно используется этот материал в теории вероятностей.[10]

Методические приемы, играющие важную роль в преподавании материала:

- наглядность и простота изложения;

- минимальный формализм в записи выражений и определениях;

- подчеркивание связи вводимых понятий с реальной практикой;

- использование сквозных примеров и задач при обсуждении разных тем;

- подчеркнутая ясность и простота формулировок большинства задач;

- подбор примеров и задач с учетом различных интересов и возрастных особенностей развития учащихся;

- проведение небольших практических исследований (измерений) и экспериментов для лучшего понимания природы случайной изменчивости и смысла вероятности;

- возможность повторения и закрепления на новом материале пройденного ранее.

Все это должно способствовать усвоению простых, но принципиально новых для учащихся понятий, росту интереса учащихся к математике в целом, формированию современного мировоззрения и умения ориентироваться в изменчивом информационном мире.[11]

Подводя итоги, заметим, предложенный выше подход к преподаванию элементов статистики и теории вероятностей в школе предполагает естественнонаучное изложение указанных дисциплин. В нем наибольшую ценность представляют вводимые понятия, сложившаяся система взглядов, ее связь с окружающим миром. При таком подходе математические доказательства на этой стадии обучения отступают на второй план, а математические методы играют ту же роль, что в физике или механике. Таким образом, введение статистики и теории вероятностей в учебный план по математике разгружает его от большого числа формальных алгебраических преобразований, наполняется более простым, но мировоззренчески очень важным математическим материалом, который должен способствовать повышению интереса учащихся к математике.[25]**??**

2.4. Простейшие вероятностные задачи

Изучение теории вероятностей начинается с введения понятий событий: достоверных, невозможных и случайных. Это можно сделать следующим образом: в жизни вы часто слышали или употребляли в разговоре следующие фразы: «Важное событие», «Вот это событие», и т.д. А что же такое событие? Как вы понимаете это слово? Приведите примеры событий. После этого учитель может подвести итог, введя определенные события (это исход наблюдения или опыта).

Рассмотрим следующие события:

1) при понижении температуры до 90° вода превращается в лед;

2) при понижении температуры вода закипает;

3) при бросании монеты выпал герб.

Охарактеризуем эти события: насколько достоверно каждое из них? Вероятно ли то, что они утверждают?

Первое верно, т.к. вода обязательно замерзнет, если понизить температуру, поэтому это событие называется достоверным.

Второе никогда не произойдет, поэтому оно называется невозможным. К какому же виду событий следует отнести третье? Всегда ли оно имеет место? Нет! Может случится, что выпадет решка и сто выпадет герб. Поэтому это событие называется случайным. Вводится определение случайного события (это такой исход наблюдения или эксперимента, который может произойти, а может не произойти). После беседы учащимся целесообразно предложить устную работу. Ее содержание может быть следующим:

1. Определить вид следующих событий.

При нагревании проволоки ее длина увеличилась;

при бросании игральной кости выпало 4 очка;

при бросании монеты выпала решка;

при осмотре почтового найдены 3 письма;

при бросании игральной кости количество выпавших очков есть натуральное число;

при стрельбе по мишени стрелок дважды попал в цель.

2. Являются ли следующие события невозможными? Получение всеми учениками вашего класса отличных оценок за очередную контрольную работу по математике; Замена всех завтрашних уроков просмотром приключенческого фильма.

3. Приведите примеры событий, которые вы считаете: Достоверными, невозможными,случайными.

Целесообразно подготовить сообщения учеников на темы:

1) Теория вероятности как наука. 2) Применение теории вероятности.

Цель: показать учащимся обширность областей применения теории вероятностей, ее значимость в науке и в жизни. Для ознакомления учащихся с понятием частоты появления какого-либо события в длинной серии испытаний рекомендуется выполнение ряда упражнений, которые требуют ответа на вопрос: «Какое из событий вероятней?». Учителю необходимо пояснить учащимся, что сравнивать события следует по их вероятностям. Например. Что вероятнее — появление герба при бросании монеты или появления нечетного числа очков при бросании игральной кости?[12]

Решение. Вероятность появления герба при бросании монеты равна $\frac{1}{2}$, а появление нечетного числа очков при бросании игральной кости равна $\frac{3}{6}$ или $\frac{1}{2}$.

Следовательно, эти события равновероятные.

После изучения данного материала, ученики должны уметь:

- приводить примеры достоверных, невозможных и случайных событий;

- уметь классифицировать события на достоверные, невозможные и случайные;

- из нескольких событий выделять наиболее вероятное, объяснять свой выбор.

2.5. Размещения и сочетания. Формула бинома Ньютона

В §52 Сочетания и размещения приведены сведения об использовании двух наиболее знакомых большинству учителей, комбинаторных формул:

$C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ и $A_n^k = \frac{n!}{(n-k!)}$.

В учебнике для 10–11 классов автор повторяет примеры, показывающие появление формулы $P_n = n!$ в качестве еще одного применения правила умножения. Затем, тоже начиная с конкретных примеров, автор приходит к формулам о выборе двух элементов из n данных:

$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ и $A_n^2 = n(n-1)$.

При этом автор сначала получает правые части этих равенств, а левые по определению есть просто сокращения излишне длинных словесных оборотов число всех выборов двух элементов без учета их порядка из n данных и число всех выборов двух элементов с учетом их порядка из n данных. После этого по аналогии вводятся символы C_k^n A_k^n и доказывается теорема о том, что

$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ и $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Доказательство основано на правиле умножения. По нему получается, что

$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1)) = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$

а тот факт, что правая часть этого равенства совпадает с $\frac{n!}{(n-k)!}$ проверяется отдельно.

Формулы $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}$ или $A_n^k = C_n^k \cdot P_k$ также выводит из правила умножения: сначала k элементов из n данных выбираются кучей (получается способов C_k^n), а потом выбранные k элементов произвольно упорядочиваются (получается P_k способов).

В данный параграф автор включил теорию соединений — комбинаторные конфигурации, которые называются сочетаниями, размещениями и перестановками. Причем обязательными для изучения являются лишь соединения без повторения-соединения, составляемые по определенным правилам из различных элементов.

Теория соединений не является обязательной для изучения даже на профильном уровне, тем не менее полезно ввести понятие хотя бы размещений с повторениями, так как задачи на подсчет этих размещений рассматриваются уже на первых уроках при решении задач на применения правила произведения. Знакомство с остальными соединениями с повторениями может быть рассмотрено с учащимися профильных классов при наличии времени. Доказательство же справедливости формул для подсчета числа перестановок с повторениями и числа сочетаний с повторениями происходит благодаря применению метода математической индукции. Дополнительной мотивацией рассмотрения, например, перестановок с повторениями является то, что биноминальные коэффициенты есть не что иное, как перестановки с повторениями, легко воспринимают вывод формулы бинома Ньютона.

Главная задача элементов комбинаторики в школьной программе, на взгляд автора заключается в том, что учащиеся получают представление о вариантивности, о различных вариантах и их числе, которые могут возникнуть во многих житейских ситуациях. Поэтому автор начинает изложение данной темы с повторения правила сложения и умножения, пройденного в девятом классе.[13]

Свойство сочетаний и треугольник Паскаля

1. Для изучения следующего свойства сочетаний предварительно составим трехэлементные подмножества множества $M =$(а,б, в,г,д).

Затем выберем из множества M любой элемент, например, «a» и разобьем все подмножества на два класса: не содержащие «a» и содержащие «a».

1 класс: (б,в,г), (б,в,д), (б,г,д), (в,г,д)

2 класс: (а,б,в), (а,б,г), (а,б,д), (а,в,г), (а,в,д), (а,г,д).

Первый класс состоит из всевозможных сочетаний без повторений по три элемента из следующих четырех: б, в, г, д. Таких сочетаний C_4^3.

Каждое подмножество второго класса состоит из элемента «а» и двух элементов, выбираемых из множества следующих элементов: б, в, г, д. Очевидно, число таких подмножеств равно C_4^2.

Подмножества 1 и 2 классов исчерпывают все трехэлементные подмножества множества M, что означает:

$C_5^3 = C_4^3 + C_4^2$

Аналогичными рассуждениями получите равенство:

$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$

Убедитесь в справедливости последнего равенства, воспользовавшись формулой подсчета числа сочетаний без повторений.

2. Составим таблицу значений: C_k^n при различных значениях n и k.В таблицу 2 занесем значения

$C_0^0 = 1, C_1^0 = 1, C_1^1 = 1, C_2^0 = 1, C_2^1 = 2, C_2^2 = 1.$

Заполните остальные строки таблицы, используя свойство сочетаний. Займемся изучением таблицы 2. Первые и последние элементы любой строки равны 1, так как $C_n^0 = C_n^n = 1$.

Это равенство будем считать верным и при $n = 0$ (пустое множество своим единственным подмножеством имеет самое себя).

Любой другой элемент таблицы 2 согласно свойству сочетаний, на основании которого составлена таблица, равен сумме двух элементов предшествующей строки: стоящего непосредственно над ним и стоящего над ним слева.

Часто числа C_k^n располагают в таблице иначе, так, что каждый элемент таблицы равен сумме двух чисел предшествующей строки, стоящих непосредственно над ним слева и справа. Тогда таблица принимает форму равнобедренного треугольника.

Исследованием свойств такой треугольной таблицы и применениями ее занимался выдающийся ученый Франции Блез Паскаль (1623–1662). Поэтому рассматриваемую таблицу часто называют треугольником Паскаля. Хотя задолго до Паскаля этот треугольник встречался в работах итальянских и арабских математиков.

Отметим некоторые из **свойств треугольника Паскаля**.

1. Сумма чисел k-той строки равна 2^k : ранее было доказано, что:

$C_k^0 + C_k^1 + \ldots + C_k^k = 2^k.$

2. Числа каждой строки треугольника, равноудаленные от ее концов, равны между собой. Обоснованием этого свойства служит равенство

$C_n^k = C_n^{n-k}$

Члены любой строки треугольника Паскаля до середины строки возрастают, а затем убывают.

Задания:

1. Сколько различных подмножеств имеет множество всех цифр?

2. Сколько различных делителей, включая 1, имеет число

а)$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ б) 195?

3. Сколько различных произведений, кратных 10, можно составить из множителей 2, 7, 11, 9, 3, 5?

4. С помощью свойства сочетаний $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ докажите равенство: $C_{k+}^k + C_{k+1}^k + C_{k+2}^k + \ldots + C_n^k = C_{n+1}^{k+1}$

5. Пользуясь треугольником Паскаля, найдите числа C_9^4

6. Напишите 11 строку треугольника Паскаля.

2.6. Случайные события и их вероятности

В §51 простейшие вероятностные задачи в учебнике А.Г.Мордковича «Алгебра и начало математического анализа 10–11 классов» рассматривается как в десятом, так и в одиннадцатом классах. Здесь учащиеся ознакомляются со следующим материалом: вероятность, как модель реальных случайных событий, классическое определение вероятности, алгоритм вычисления вероятности, по-этому определению, связь между вероятностью события и противоположного ему события.

Термин **«простейшие»** в применении к вероятностным задачам означает отсутствие формульной комбинаторики (числа размещений и сочетаний). Во всех примерах и задачах этого данной темы вполне хватает правила умножения, формулировку которого ученики повторяют в 11 классе. Поэтому, несмотря на присутствие термина «вероятностные» в названии темы, с учебной точки зрения мы закрепляем умение работать с простейшими комбинаторными ситуациями: проводить непосредственный перебор случаев, разумно организовывать перебор и использовать правило умножения. В 11 классе продолжаем изучение дерева всевозможных вариантов.

Рассмотрение цепочки последовательно усложняющихся комбинаторных примеров подводит к необходимости расширить имеющийся технический аппарат комбинаторики. Используя материал изученный в 9 классе(перебор вариантов и правило умножения), ученики старшей школы знакомятся с понятиями размещения и сочетания.

Обратим внимание на пример: «Игральную кость бросают четыре раза. Что более вероятно: то, что шестерка не появится ни разу?» Данный пример интересен с исторической точки зрения, так как послужил одной из отправных точек к созданию в 17 веке теории вероятностей. Важен он и содержательно, так как по существу является начальным для изучения в дальнейшем случайных событий и их вероятностей.[14]

В анализе предоставленного нами примера ясно указано, что основой решения является правило умножения. Если действовать предполагая, что теорема Бернулли заранее известна, то ответ для вероятности того, что шестерка не появится ни разу, следовало бы получить как $P(A) = (\frac{5}{6})^4$. Мы получаем тот же ответ, но как $P(A) = \frac{5^4}{6^4}$, где для вычисления и числителя, и знаменателя применяется уже хорошо известное правило умножения.

При изучении этой темы надо, чтобы учащиеся отчетливо представляли себе роль сочетаний, размещений и перестановок в различных вероятностных задачах и научились по формулировкам задач определять, какой из видов соединений будет использован при решении той или иной задачи. Здесь можно руководствоваться следующим: если множество исходов составляют всевозможные комбинации из n элементов по k, то в задаче будут фигурировать сочетания; если же всевозможные комбинации из n элементов по n, то в задачах идет речь о перестановках; размещения будут тогда, когда речь идет о порядке элементов в рассматриваемых комбинациях.

Задачи:

1. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

2. В классе 30 учащихся. Из них 12 мальчиков, остальные девочки. Известно, что к доске должны быть вызваны двое учащихся. Какова вероятность, что это девочки?

3. Набирая номер телефона, состоящий из 7 цифр, Антон забыл, в какой последовательности идут три последние цифры. Помня лишь, что это цифры 1, 5 и 9, он набрал первые 4 цифры, которые знал, и наугад комбинацию из цифр 1, 5 и 9. какова вероятность того, что Антон набрал верный номер?

2.7. Электронный учебник и его применение

Сегодня, в век интернета, умение создавать web-страницы и сайты становится элементом общей культуры человека информационного общества. По этой причине разделу web-программирования отводится значительное место в программе изучения информатики и информационных темам.

Учебник созданный в виде гипертекстового документа и с помощью технологий, что позволяет изучать предмет не только снаружи, но и изнутри, т.е. сам по себе учебник можно рассматривать как наглядное пособие по изучаемым темам.

Учебник содержит подробный теоретический материал, большое количество примеров и практических упражнений. В учебнике содержится также обширный справочный материал, к которому очень легко обращаться.

Все это позволяет использовать их для разных форм работы: как обучающее средство при индивидуальной или домашней работе, для проверки знаний, для отработки навыков и как справочное средство при творческой работе.

Время идёт, и программы быстро устаревают. И учебный материал, и форма представления. В настоящее время в сфере образования наиболее актуальным становится разработка компьютерных программ — электронных учебников по различным дисциплинам. Компьютерные учебные программы создаются по тем дисциплинам, которые являются профилирующими в профессиональной подготовке.[15]

Данное электронное пособие создано средствами языка гипертекстовой разметки HTML с использованием фреймов, таблиц, ссылок и прочих возможностей этого языка. Стиль отдельных элементов страницы назначался с помощью каскадных таблиц стилей (CSS). Не обошлось дело и без JavaScript, с помощью которых были созданы кнопки перемещения по страницам учебника.

Было создано электронное пособие для учителя и учащихся по теме «Комбинаторика и вероятность».

Достоинствами, присущими этому пособию, являются:

- наглядность представления материала (технология мультимедийных гиперссылок, которые могут быть сделаны на документы и презентации, использующие цвет, иллюстрации, видео, звук и т.д.);

- оперативность передачи информации любого объема и вида на любые расстояния;

- интерактивный режим (позволяет учащимся самим контролировать скорость прохождения учебного материла);

- возможность регулярной корректировки учебника по мере появления новых данных;

- быстро найти необходимую информацию.

Достаточная степень наглядности представленного материала в электронном учебно-методическом пособии, взаимосвязь различных компонентов, комплексность и интерактивность делает его незаменимым помощником, как для обучаемых, так и для обучающих.

§3.Разработка системы уроков по теме «Комбинаторика и вероятность»

Урок№1.Простейшие вероятностные задачи

Тип урока: комбинированный.

Длительность: 2 учебных часа.

Цели урока:

образовательные: научить в процессе реальной ситуации определять достоверные, невозможные, равновероятностные, совместные и несовместные события, научить решать задачи из жизни;

воспитательные: воспитание умения слушать и вступать в диалог, участвовать в коллективном обсуждении проблем, интегрироваться в группу сверстников и строить продуктивное взаимодействие, настойчивости в достижении цели и заинтересованности в конечном результате труда.

развивающие: развитие умения анализировать, обобщать изучаемые факты, выделять и сравнивать существенные признаки, выбирать наиболее эффективные способы решения задач в зависимости от конкретных условий; рефлексия способов и условий действия; контроль и оценка процесса и результатов деятельности.

Методы обучения:

- словесные;
- наглядные;
-самостоятельная работа.

Формы обучения:

- коллективная;
- фронтальная.

Используемые технологии: ИКТ.

Оборудование и материалы для урока: компьютер, проектор, презентация по теме «Простейшие вероятностные задачи», экран.

План урока:

1) Организационный момент;

2) Повторение и закрепление пройденного материала;

3) Изучение нового материала;

4) Итоги урока;

5) Домашнее задание.

Ход урока

1. Организационный момент

Приветствие учеников, сообщение темы и цели урока.

2. Повторение и закрепление пройденного материала

Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач). Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Определение среднего арифметического.

2. Приведен рост (в см) пяти человек: $163, 183, 172, 180, 172$. Найдите среднее, моду, медиану, дисперсию, среднее квадратичное отклонение.

Вариант 2

1. Определение моды измерений.

2. Приведен рост (в см) пяти человек: $187, 162, 171, 162, 183$. Найдите среднее, моду, медиану, дисперсию, среднее квадратичное отклонение.

Ответ:

вариант 1. а) 174; б) 172; в) 172; г) 45; д) $6,71$.

вариант 2. а) 173; б) 162; в) 171; г) $108,4$; д) $10,41$.

3. Изучение нового материала

3.1. Что такое событие? *(класс заранее был поделен на группы, одна из групп подготовила информацию об этом понятии) (слайд 3)*

Например:

В теории вероятностей возможный исход эксперимента, называется элементарным событием, а множество таких исходов называется просто событием. **Событие** - это результат испытания.

Пример

Стрелок стреляет по мишени, разделенной на четыре области. Выстрел — это **испытание.** Попадание в определенную область мишени — событие. В урне имеются цветные шары. Из урны наудачу берут один шар. Извлечение шара из урны есть испытание. Появление шара определенного цвета — событие. В теории вероятностей под событием понимают то, относительно чего после некоторого момента времени можно сказать одно и только одно из двух.

Да, оно произошло. Нет, оно не произошло.

В жизни мы постоянно сталкиваемся с тем, что некоторое событие может произойти, а может и не произойти.

Пример

В следующем году первый снег выпадет в субботу. Бутерброд упадет маслом вниз. При бросании кубика выпадет шестерка. При бросании кубика выпадет четное число. У меня есть лотерейный билет. После опубликования результатов розыгрыша лотереи интересующее меня событие — выигрыш тысячи рублей, либо происходит, либо не происходит. В следующем году первый снег выпадет в субботу.

Такие непредсказуемые события называются **случайными.** (слайд 4) Теория вероятностей изучает различные модели случайных событий, их свойства и характеристики. Разумеется, эта теория не может однозначно предсказать, какое событие в реальности произойдет, но может оценить, какое событие наиболее вероятно. При этом будем считать, что случайные события равновероятны (или равновозможны), - идеализированная модель.

Два события, которые в данных условиях могут происходить одновременно, называются совместными, а те, которые не могут происходить одновременно, - несовместными. (слайд 5)

Примеры:

1. Из ящика с деталями наудачу извлечена деталь. Появление стандартной детали исключает появление нестандартной детали. События «появилась стандартная деталь» и «появилась нестандартная деталь» — несовместные.

2. Брошена монета. Появление «герба» исключает появление надписи. События «появился герб» и «появилась надпись» — несовместные.

3. Примеры учеников.

Равновозможными называются события, когда в их наступлении нет преимуществ. (слайд 6)

Неравновозможные события те, у которых в наступлении одного из событий есть какое то преимущество.

Примеры:

1. Появление герба или надписи при бросании монеты представляют собой равновероятные события.

2. Пусть бросают игральную кость. В силу симметрии кубика можно считать, что появление любой из цифр $1, 2, 3, 4, 5$ или 6 одинаково возможно (равновероятно).

3. Примеры учеников.

Событие, которое происходит всегда, называют **достоверным** событием. Вероятность достоверного события равна 1.(слайд 7)

Событие, которое не может произойти, называется **невозможным**. Вероятность невозможного события равна 0.

Примеры:

1. В следующем году снег не выпадет. При бросании кубика выпадет семерка. Это невозможные события.

2. В следующем году снег выпадет. При бросании кубика выпадет число, меньше семи. Ежедневный восход солнца. Это достоверные события.

3. Пусть, например, из урны, содержащей только черные шары, вынимают шар. Тогда появление черного шара — достоверное событие; появление белого шара — невозможное событие.

4. Приведите примеры достоверных и невозможных событий.

3.2. Краткая историческая справка (Подготовили ученики).

Например:

Первые работы, в которых зарождались основные понятия теории вероятностей, представляли собой попытки создания теории азартных игр (Кардано, Гюйгенс, Паскаль, Ферма и другие в XVI–XVII вв). Следующий этап развития теории вероятностей связан с именем Якоба Бернулли (1654–1705 гг.). Доказанная им теорема, получившая в последствии название «Закона больших чисел», была первым теоретическим обоснованием накопленных ранее фактов. Дальнейшими успехами теория вероятностей обязана Муавру, Лапласу, Гауссу, Пуассону и другим. Наиболее плодотворный период связан с именами П.Л. Чебышева (1821–1894 гг.) и его учениками А.А. Маркова (1856–1922 гг.) и А.М. Ляпунова (1857–1918 гг.). В этот период теория вероятностей становится стройной математической наукой. Ее последующее развитие в нашей стране обязано в первую очередь таким математикам, как С.Н. Бернштейн, В.И. Романовский, А.Н.Колмагоров, А.Я. Хинчин, Б.В. Гнеденко, Н. В. Смирнов и другие.[16]

3.3. Что такое «теория вероятностей»?

Например:

Теория вероятностей — раздел математики, изучающий закономерности случайных явлений: случайные события, случайные величины, их свойства и операции над ними. (Советский энциклопедический словарь, 1982 год)

Теория вероятностей — это математическая наука, позволяющая по вероятностям одних случайных событий находить вероятности других случайных событий, связанных каким-либо образом с первыми. (А.А.Боровков «Теория вероятностей», М.: Наука, 1986 год.)

Вероятность — это численная характеристика реальности появления того или иного события. Классическое определение вероятности.(слайд 8)

Вероятностью события A при проведении некоторого испытания называют отношение числа тех исходов, в результате которых наступает событие A, к общему числу всех (равновозможных между собой) исходов этого испытания.

Для решения задач используют алгоритм нахождения вероятности случайного события. (слайд 9)

Для нахождения вероятности случайного события A **при проведении некоторого испытания следует найти:**

1) число N всех возможных исходов данного испытания;

2) количество $N(A)$ тех исходов, в которых наступает $N(A)$ событие A;

3) частное $\frac{N(A)}{N}$ оно и будет равно вероятности события A. Принято вероятность события P обозначать так: $P(A)$. Значит $P(A) = \frac{N(A)}{N}$

Примеры:

(слайд 10)

1. На завод привезли партию из 1000 подшипников. Случайно в эту партию попало 30 подшипников, не удовлетворяющих стандарту. Определить вероятность P(A) того, что взятый наудачу подшипник окажется стандартным.

Решение

Число стандартных подшипников равно $1000 - 30 = 970$. Будем считать, что каждый подшипник имеет одинаковую вероятность быть выбранным. Тогда полная группа событий состоит из $N = 1000$ равновероятных исходов, из которых событию A благоприятствуют N(A)= 970 исходов.

Поэтому $P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{970}{1000} = 0,97$.

Ответ: 0,97.

2. Найдем вероятность того, что при одном бросании игральной кости (кубика) выпадает:
а) три очка; б) число очков, кратное трем; в) число очков больше трех; г) число очков, не кратное трем.

Решение

Всего имеется $N = 6$ возможных исходов: выпадение $1, 2, 3, 4, 5, 6$ очков. Считаем, что эти исходы равновозможны.

а) Только при одном из исходов $N(A) = 1$ происходит интересующее нас событие A — выпадение трех очков. Вероятность этого события
$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{1}{6}$.

б) При двух исходах $N(B) = 2$ происходит событие B: выпадение числа очков кратных трем: выпадение или трех или шести очков. Вероятность такого события
$P(B) = \frac{N(B)}{N} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

в) При трех исходах $N(C) = 3$ происходит событие C: выпадение числа очков больше трех: выпадение четырех, пяти или шести очков. Вероятность этого события
$P(C) = \frac{N(C)}{N} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

г) Из шести возможных выпавших чисел четыре $(1, 2, 45)$ не кратны трем, а остальные два (3 и 6) делятся на три. Значит, интересующее нас событие D, наступает в четырех случаях, т.е. $N(D) = 4$. Вероятность такого события:
$P(D) = \frac{N(D)}{N} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Ответ: а)$\frac{1}{6}$; б)$\frac{1}{3}$; в)$\frac{1}{2}$; г)$\frac{2}{3}$.

Для вычисления вероятности часто используют правило умножения. (слайд 11) Для того, чтобы найти число всех возможных исходов независимого проведения двух испытаний A и B, следует перемножить число всех исходов испытания A и число всех исходов испытания B.

Пример

Найдем вероятность того, что при подбрасывании двух костей суммарное число очков окажется равным 5.

Решение

Возможно следующее сочетание очков на первой и второй костях:

$1+4, 2+3, 3+2, 4+1$ — четыре благоприятных случая ($N(A)=4$). Всего возможных исходов $N=6\cdot 6=36$ (по шесть для каждой кости). Тогда вероятность рассматриваемого события

$P(A)=\frac{N(A)}{N}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

Ответ: $\frac{1}{9}$

Вероятность $P(A)$ некоторого события $0\leq P(A)\leq 1$.

При решении некоторых задач удобно использовать свойство вероятностей противоположных событий.(слайд 12)

События A и B называются противоположными, если всякое наступление события A означает ненаступление события B, а ненаступление события A — наступление события B. Событие, противоположное событию A, обозначают символом $\bar{A}$.

Сумма вероятностей противоположных событий равна 1:
$P(A)+P\bar{A}=1$.

Примеры:

1. Бросаем один раз игральную кость. Событие A — выпадение четного числа очков, тогда событие $\bar{A}$ — выпадение нечетного числа очков.

2. В среднем из 1000 аккумуляторов, поступивших в продажу, 6 неисправны. Найдите вероятность того, что один купленный аккумулятор окажется исправным.

Решение

Элементарный исход — случайно выбранный аккумулятор. Поэтому $N=1000$.

Событию $A=\{$аккумулятор исправен$\}$ благоприятствуют $1000-6=994$ исхода.

Поэтому $N(A)=994$.

Тогда $P(A)=\frac{N(A)}{N}=\frac{994}{1000}=0,994$

Ответ: $0,994$.

Эту задачу можно решить с помощью формулы вероятности противоположного события $\bar{A}=\{$аккумулятор неисправен$\}$. Тогда $N\bar{A}=6$.

Имеем $P\bar{A}=\frac{N\bar{A}}{N}=0,006$

Значит, $P(A)=1-P\bar{A}=1-0,006=0,994$

Ответ: $0,994$

3.4. Решение задач *(у доски).*

1. Монета бросается два раза. Какова вероятность того, что:

а) герб выпадет хотя бы один раз?

б) герб выпадет два раза? (слайд 13)

Решение

а) Пусть A — событие, состоящее в том, что в результате проведенного испытания герб выпал хотя бы один раз.

Равновозможными элементарными исходами здесь являются: ГГ, ГР, РГ, РР, т.е. $N = 4$.

Событию A благоприятствуют исходы: ГГ, ГР, РГ, т.е. $N(A) = 3$.

Следовательно $P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{3}{4}$

б) Пусть B - событие, состоящее в том, что в результате проведенного испытания герб выпал два раза.

Событию B благоприятствует один исход: ГГ, т.е. $N(B) = 1$. Следовательно $P(B) = \frac{N(B)}{N} = \frac{1}{2}$.

Ответ: а)$\frac{3}{4}$, б)$\frac{1}{2}$.

2. Игральная кость бросается два раза. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков равна 6 (событие A)? (слайд 16)

Решение

Равновозможными элементарными исходами здесь являются пары (x, y), где x и y принимают значения: $1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Таким образом, общее число элементарных исходов равно $N = 6 \cdot 6 = 36$. Событию A благоприятствуют пары $(1; 5), (2; 4), (3; 3), (4; 2), (5; 1)$, число которых равно $N(A) = 5$.

Следовательно, $P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{5}{36}$.

Ответ:$\frac{5}{36}$

3. В ящике лежат 6 красных и 6 синих шаров. Наудачу вынимают 8 шаров. Определите вероятность события A — все выбранные шары красные. (слайд 14)

Решение

$p(A) = 0$, т.к. это событие A — невозможное.

Ответ:0.

4. Научная конференция проводится 3 дня. Всего запланировано 50 докладов: в первый день — 30 докладов, а остальные распределены поровну между вторым и третьим днями. Порядок докладов определяется жеребьевкой. Какова вероятность, что доклад профессора M. окажется запланированным на последний день конференции? (слайд 15)

Решение

Так как в третий день будут слушать 10 докладов, то благоприятных исходов N(A)= 10, а всего докладов 50, т.е. равновозможных исходов $N = 50$. Поэтому $P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{10}{50} = 0,2$.

Ответ:$0,2$.

5. Перед началом первого тура чемпионата по теннису разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 46 теннисистов, среди которых 19 участников из России, в том числе Ярослав Исаков. Найдите вероятность того, что в первом туре Ярослав Исаков будет играть с каким-либо теннисистом из России. (слайд 16)

Решение

Число всех исходов $N = 45$. Число элементарных событий, благоприятствующих событию A равно 18. Все элементарные события равновозможны по условию задачи, поэтому

$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{18}{45} = 0,4$

Ответ:$0,4$.

6. Вася, Петя, Коля и Леша бросили жребий — кому начинать игру. Найдите вероятность того,что начинать игру должен будет Петя.

Решение

Случайный эксперимент — бросание жребия. Элементарное событие в этом эксперименте — участник, который выиграл жребий. Перечислим их:

(Вася), (Петя), (Коля) и (Лёша).

Общее число элементарных событий $N = 4$. Жребий подразумевает, что элементарные события равновозможны. Событию $A =${жребий выиграл Петя} благоприятствует только одно элементарное событие (Петя). Поэтому $N(A) = 1$. Тогда $P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{1}{4} = 0,25$.

Ответ: $0,25$.

7. Игральный кубик (кость) бросили один раз. Какова вероятность того, что выпало число очков, больше чем 4?

Решение

Случайный эксперимент — бросание кубика. Элементарное событие — число на выпавшей грани. Граней всего шесть. Перечислим все элементарные события:

$1, 2, 3, 4, 5$ и 6.

Значит, $N = 6$. Событию A =выпало больше, чем 4 благоприятствует два элементарных события: 5 и 6. Поэтому $N(A) = 2$. Элементарные события равновозможны, поскольку подразумевается, что кубик честный. Поэтому $P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Ответ:$\frac{1}{3}$.

8. В случайном эксперименте бросают два игральных кубика. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 8 очков.

Решение

Элементарный исход в этом опыте — порядочная пара чисел. Первое число выпадает на первом кубике, а второе — на втором. Множество элементарных исходов удобно представить таблицей. Строки соответствуют результату первого броска, столбцы — результату второго броска. Всего элементарных событий $N = 3$.

Напишем в каждой клетке таблицы сумму выпавших очков и закрасим клетки где сумма равна 8. Таких ячеек 5.

Значит событию A =$\{$сумма равна 8$\}$ благоприятствует пять элементарных исходов.

Следовательно, $N(A) = 5$. Поэтому $P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{5}{36}$

Ответ:$\frac{5}{36}$

9. В соревнованиях по толканию ядра участвуют 4 спортсмена из Финляндии, 7 спортсменов из Дании, 9 спортсменов из Швеции и 5 — из Норвегии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Швеции.

Решение

Элементарный исход — спортсмен, который выступает последним. Последним может оказаться любой спортсмен.

Всего спортсменов $N = 4 + 7 + 9 + 5 + 5 = 25$. Событию $A = \{$последний из Швеции} благоприятствуют только 9 исходов (столько, сколько участвует шведских спортсменов). Поэтому $N(A) = 9$.

Тогда $P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{9}{25} = 0,36$

Ответ:$0,36$.

10. В чемпионате по гимнастике участвуют 20 спортсменок: 8 из России, 7 из США, остальные — из Китая. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Китая.

Решение

Элементарные события — спортсменка, выступающая первой. Поэтому $N = 20$. Чтобы найти число элементарных событий, благоприятствующих событию $A = \{$первой выступает спортсменка из Китая$\}$, нужно подсчитать число спортсменок из Китая: $N(A) = 20 - (8 + 7) = 5$. Все элементарные события равновозможны по условию задачи, поэтому

$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{5}{20} = 0,25$

Ответ:$0,25$.

4. Итоги урока(слайд 17)

Ученики проговаривают, что нового узнали на уроке. Учитель оценивает работу ребят. При выходе из кабинета каждый ученик выбирает прямоугольник по цвету, соответствующему надписями «всё понятно и усвоено», «трудно и не всё понятно», «не понятно и не усвоено», и опускает в соответствующий конверт.[17]

5. Домашнее задание

№1. Фабрика выпускает сумки. В среднем на 100 качественных сумок приходится восемь сумок со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Результат округлите до сотых.

Решение

Элементарный исход — случайно выбранная сумка. Поэтому $N = 108$. Событию $A =$\{качественная сумка\} благоприятствуют 100 исходов. Поэтому $N(A) = 1004$. Тогда $P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{100}{108} = 0,93$

Ответ: $0,93$.

№2. Какова вероятность появления четных очков при одном бросании игрального кубика?

Решение

Пусть A — событие выпадет четное число $N = 6$, т.к. число возможных исходов 6:

$(1, 2, 3, 4, 5, 6)$.

$M = 3$, т.к. только 3 четных очка. Значит, $P(A) = \frac{3}{6} = 0,5$.

Ответ:$0,5$.

§51. №2, 3, 5, 8. Повторить правила по изученной теме.

№1. Объясните, что такое достоверное, невозможное и случайное событие. Приведите примеры.

№2. Укажите, какое из следующих событий достоверное, какое — невозможное и какое случайное:

а) летних каникул не будет;

б) бутерброд упадет маслом вниз;

в) учебный год когда-нибудь закончится.

№3. Петя и Толя сравнивают свои дни рождения. Укажите, какое из следующих событий достоверное, какое — невозможное и какое случайное. Событие состоит в следующем:

а) их дни рождения не совпадают;

б) их дни рождения совпадают;

в) Петя родился 29 февраля, а Толя — 30 февраля;

г) дни рождения обоих приходятся на праздники — Новый год (1 января) и День независимости России (12 июня);

д) дни рождения в этом году.

№4. Случайный опыт состоит в выяснении пола детей в семьях с тремя детьми. Сколько возможных исходов у этого опыта? Какие?

Урок №2.Размещения и сочетания

Цели урока:

образовательные: научить учащихся решать задачи с помощью формул сочетаний и размещений; различать комбинаторные соединения; научить решать задачи из жизни;

воспитательные: воспитание умения слушать и вступать в диалог, участвовать в коллективном обсуждении проблем, интегрироваться в группу сверстников и строить продуктивное взаимодействие, настойчивости в достижении цели и заинтересованности в конечном результате труда;

развивающие: развитие умения анализировать, обобщать изучаемые факты, выделять и сравнивать существенные признаки, выбирать наиболее эффективные способы решения задач в зависимости от конкретных условий; рефлексия способов и условий действия; контроль и оценка процесса и результатов деятельности.

Методы обучения:

- словесные;
- наглядные;
-самостоятельная работа.

Формы обучения:

- коллективная;
- фронтальная.

Оборудование и материалы для урока: компьютер, проектор, презентация, экран.

План урока:

1) Организационный момент;
2) Повторение и закрепление пройденного материала;
3) Изучение нового материала;
4) Контрольные вопросы;
5) Закрепление изученного, задание на уроках;
6) Задание на дом;
7) Подведение итогов уроков.

Ход урока

1. Организационный момент

2. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Достоверное событие и его вероятность.

2. Найти вероятность того, что на игральной кости выпадет четное число очков.

3. Найти вероятность того, что при подбрасывании двух костей суммарное число очков окажется равным 8.

Вариант 2

1. Невозможное событие и его вероятность.

2. Найти вероятность того, что на игральной кости выпадет нечетное число очков.

3. Найти вероятность того, что при подбрасывании двух костей суммарное число очков окажется равным 9.

3. Изучение нового материала.

При рассмотрении простейших вероятностных задач нам приходилось подсчитывать число различных исходов (комбинаций). Для небольшого числа элементов такие вычисления сделать несложно. В большинстве случаев такая задача представляет значительную сложность. Комбинаторикой называют область математики, которая изучает вопросы о числе различных комбинаций (удовлетворяющих тем или иным условиям), которые можно составить из данных элементов. Сначала рассмотрим некоторые задачи комбинаторики.

Пример 1

Сколько существует двузначных чисел?

Решение

При образовании чисел используются десять цифр:$0, 1, 2, ..., 9$.

Так как число двузначное, то число десятков может принимать одно из девяти значений:$1, 2, 3, ..., 9$.

Число единиц принимает те же значения, и еще 0 (10 вариантов).Если цифра десятков 1, то цифра единиц может быть любой из десяти: $0, 1, 2, \ldots, 9$. Если цифра десятков 2, то цифра единиц вновь может быть любой из десяти: $0, 1, 2, \ldots, 9$, и т. д.

Тогда получаем, что возможно $9 \cdot 10 = 90$ вариантов (чисел). Разумеется, их легко выписать: $10, 11, 12, \ldots, 99$.

Пример 2

Сколько существует пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево?

Решение

Очевидно, что на первом (соответственно, и на последнем) месте может стоять любая цифра (кроме нуля) — 9 вариантов. На втором (соответственно и на предпоследнем) месте может стоять любая цифра — 10 вариантов. На третьем месте (в середине) также может стоять любая цифра — 10 вариантов. Тогда получаем, что возможно $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ вариантов (чисел).

Из рассмотренных примеров можно сформулировать комбинаторное правило умножения.

Пусть имеется n элементов, и надо выбрать из них один за другим k элементов. Если первый элемент можно выбрать n_1 способами, после чего второй элемент можно выбрать n_2 способами из оставшихся, затем третий элемент можно выбрать n_3 способами из оставшихся и т. д., то число способов, которыми могут быть выбраны все к элементов, равно произведению
$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Пример 3

В спортивных соревнованиях участвуют 10 команд. Сколькими способами могут быть распределены золотая, серебряная и бронзовые медали, если любая команда может получить только одну медаль?

Решение

Начнем распределять медали с наименее ценной. Бронзовую медаль может получить одна из 10 команд (10 вариантов). После этого серебряную медаль получит одна из оставшихся 9 команд (9 вариантов). Наконец, золотую медаль получает одна из оставшихся 8 команд (8 вариантов).

Следовательно, общее число способов, которыми могут быть распределены золотая, серебряная и бронзовая медали, равно $10 \cdot 9 * 8 = 720$.

Пример 4

В 9 классе изучается 10 предметов. Во вторник должны быть проведены 6 различных уроков. Сколькими способами можно составить расписание занятий на вторник?

Решение

По аналогии с примером 3 на первом уроке изучается любой из 10 предметов, на втором уроке — любой из оставшихся 9 предметов, на третьем уроке — любой из оставшихся 8 предметов и т. д. Таким образом, расписание можно составить $10 - 9 * 8 - 7 - 6 - 5 = 151, 200$ способами.[18]

Перестановки

Введем некоторые необходимые понятия. Соединением Из n элементов по k назовем выборку k элементов из n Различных элементов $(k \leq n)$

Пример 5

Пусть даны три различных элемента $(n = 3) : a, b, c.$

Решение

Перечислим соединения из трех элементов по одному $(k = 1) : a, b, c;$

Соединения из трех элементов по два

$(k = 2) : ab, ba, ac, ca, bc, cb;$

Соединения из трех элементов по три

$(k = 3) : abc, acb, bac, bca, cab, cba.$

В зависимости от того, имеет ли значение порядок элементов или нет, а также от того, входят ли в соединение все n элементов или только (при условии $k \leq n$),

Различают три вида соединений: перестановки, размещения, сочетания.

Комбинаторика изучает число таких соединений (но не сами соединения).

Сначала рассмотрим простейший вид соединений - перестановки. Соединения, каждое из которых содержит n различных элементов, взятых в определенном порядке, называются перестановками из n элементов. Другими словами, имеется n позиций (мест), которые надо заполнить n. N мест различными элементами.

Пример 6

Рассмотрим перестановки из трех элементов: $a, b, c.$

Необходимо расположить на три позиции три элемента.Если на первую позицию поставить элемент a, То возможны перестановки: abc, acb.Если на первую позицию поставить элемент b, То возможны перестановки: bac, bca. Если на первую позицию поставить элемент c, То возможны перестановки: cab, cba.

Видно, что число перестановок из трех элементов равно 6. Вообще, число перестановок из n элементов обозначают символом P_n (читается:P из n).

В данном примере $P_3 = 6$.

Выведем формулу числа P_n перестановок из n элементов.

Используем комбинаторное правило умножения. На первую позицию можно поместить любой из n элементов, на вторую позицию - любой из оставшихся $(n-1)$ элементов, на третью позицию - любой из оставшихся $(n-2)$ элементов и т. д. В результате получим:

$P_n = n(n-l)(n-2)\cdot \ldots \cdot 3\cdot 2\cdot 1.$

Расположим множители в порядке возрастания.

Имеем:

$P_n = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)n$. Для произведения первых n натуральных чисел используют символ $n!$ (читается: n факториал), т. е.

$n! = 1\cdot 2\cdot 3 - \ldots - \cdot (n-2)(n-1)n.$

При этом $1! - 1$ (и $0! = 1$).

Тогда число всевозможных перестановок из n элементов вычисляется по формуле $P_n = n!$.

Пример 7

Сколькими способами можно распределить 3 путевки в различные дома отдыха, если на эти путевки имеются 4 кандидата?

Решение

$A_4^3 = 4\cdot 3\cdot 2 = 24$

Число всех выборов двух элементов из n без учёта их порядка называется числом сочетаний из n элементов по 2.(Слайд 5)

$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$.

Соединения, отличающиеся друг от друга по крайней мере одним элементом, каждое из которых содержит k элементов, выбранных из n различных элементов, называют **сочетаниями** из n элементов по k. Порядок следования элементов неважен. Число сочетаний из n элементов по k обозначают символом C^* (читается: C из n по k).

Пусть имеется пять гвоздик разного цвета. Обозначим их буквами a, b, c, d, e.

Требуется составить букет из трех гвоздик.

Выясним, какие букеты могут быть составлены. Если в букет входит гвоздика a, то можно составить такие букеты:

$abc, abd, abe, acd, ace, ade$

Если в букет не входит гвоздика a, но входит гвоздика b, то можно получить такие букеты:

bcd, bce, bde.

Наконец, если в букет не входит ни гвоздика , ни гвоздика b, то возможен только один вариант составления букета: cde.

Мы указали все возможные способы составления букетов, в которых по-разному сочетаются три гвоздики из данных пяти. Говорят, что мы составили все возможные сочетания из пяти элементов по три.[15]

Сочетанием из n элементов по $k (0 < k < n)$ называется любое множество, составленное из k элементов, выбранных из данных n элементов.

Число сочетаний из n элементов по k обозначают C_n^k (читают из n по k).

В отличие от размещений в сочетаниях не имеет значения, в каком порядке указаны элементы. Два сочетания из n элементов по k отличаются друг от друга хотя бы одним элементом. В рассмотренном примере, составив все сочетания из 5 элементов по 3, мы нашли, что $C_5^3 = 10$

Выведем формулу числа сочетаний из n элементов по k, где $k \le n$.

Для этого сначала выясним, как C_5^3 выражается через A_5^3 и P_3 .

Мы нашли, что из пяти элементов a, b, c, d, e можно составить следующие сочетания по трем элементам:

$abc, abd, abe, acd, ace, ade, bed, bec, bde, cde$.

В каждом сочетании выполним все перестановки. Число таких перестановок равно P_3. В результате получим все возможные комбинации из 5 элементов по 5, которые отличаются либо самими элементами, либо порядком элементов, т.е. все размещения из 5 элементов по 3. всего мы получим A_5^3 размещений.[11]

Значит, $C_5^3 \cdot P_3 = A_5^3$.

Отсюда $C_5^3 = \frac{A_5^3}{P_3}$.

Аналогично будем рассуждать и в общем случае.

Допустим, сто имеется множество, содержащее n элементов, и из его элементов составлены все возможные сочетания по k элементов. Число таких сочетаний равно C_n^k . В каждом сочетании можно выполнить P_k перестановок.

В результате мы получим все размещения, которые можно составить из n элементов по k. Их число равно A_k^n.

Значит, $A_n^k = C_n^k \cdot P_n$.

Отсюда, $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}$

Мы получили формулу:

$C_n^k = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot k}$.

Формулу числа сочетаний можно записать в другом виде. Умножим числитель и знаменатель дроби на

$(n-k)!$, где $n \neq k$.

Получим:

$C_n^k = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))\cdot(n-k)!}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot k\cdot(k-n)!}$

Очевидно, что в числителе дроби записано произведение всех натуральных чисел от n до 1, взятых в порядке убывания, т.е. числитель дроби равен $n!$.

Получаем формулу: $C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$.

Заметим, что эту формулу можно использовать и в случае, когда $n = k$, если принять по определению, что $0! = 1$.

Пример 8

(Слайд 6)

Из 15 членов туристической группы надо выбрать трех дежурных. Сколькими способами можно сделать этот выбор?

Каждый выбор отличается от другого хотя бы одним дежурным. Значит, здесь речь идет о сочетаниях из 15 элементов по 3:

$C_{15}^3 = \frac{15!}{3!\cdot12!} = \frac{13\cdot14\cdot15}{1\cdot2\cdot3} = \frac{2730}{6} = 455$

Ответ: трех дежурных можно выбрать 455 способами.

Пример 9

(Решать задачу выходит ученик)(Слайд 7)

Из вазы с фруктами, в которой лежит 9 яблок и 6 груш, надо выбрать 3 яблока и 2 груши. Сколькими способами можно сделать такой выбор?

Решение

Выбрать 3 яблока из 9 можно C_9^3 способами, а выбрать 2 груши из 6 можно

C_6^2 способами. Так как при каждом выборе яблок груши можно выбрать C_6^2 способами, то сделать выбор фруктов, о котором говорится в задаче, можно $C_9^3 \cdot C_6^2$ способами.

$C_9^3 \cdot C_6^2 = \frac{9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3} \cdot \frac{6\cdot5}{1\cdot2} = 1260.$

Ответ: указанный выбор фруктов можно сделать 1260 способами.

Пример 10

(Решать задачу выходит ученик)(Слайд 8)

В классе 30 учеников. Нужно избрать 5 человек на городской слет активистов.Сколькими способами это сделать?

Решение

Так как все делегаты обладают равными правами и обязанностями, то порядок в выборке не важен. Эти множества из пяти элементов будут отличаться друг от друга только составом. Значит, мы имеем дело с сочетаниями.

$C_{28}^5 = \frac{28!}{(28-5)!\cdot5!} = \frac{28\cdot27\cdot26\cdot24}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = 98280$

Ответ: 98280 способов.

Пример 11

(Слайд 9)

Сколько различных стартовых шестерок можно образовать из числа 10 волейболистов?

Решение

Так как при игре в волейбол функции игроков практически равны, то значение имеет только состав шестерки.Тогда

$C_{10}^6 = \frac{10!}{(10-6)!\cdot6!} = \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = 210$

Ответ: 210 стартовых шестерок.

Определение. Размещениями из элементов по называется любой выбор элементов, взятых в определенном порядке из элементов.(Слайд 10)

Пример 12

Сколькими различными способами собрание, состоящее из 50 человек, может выбрать из своей среды председателя собрания, его заместителя и секретаря?

Решение

Существует 50 способов выбора одного кандидата на должность председателя собрания, далее имеется 49 кандидатов на должность заместителя и, наконец, одного из оставшихся 48 человек можно выбрать на должность секретаря. Согласно правилу произведения для этого существует способов.

Итак, существует n способов выбора первого элемента. После того, как он выбран, остается $(n-1)$ способ для выбора второго элемента. После выбора первого и второго элементов остается $(n-2)$ способа для выбора третьего элемента. Тогда, разместить на 3разных места три из n разных элементов можно $(n-1)(n-2)$ способами, т.е.

$A_n^3 = n \cdot (n-1)(n-2)$,

рассуждая аналогично, $A_n^4 = n \cdot (n-1)(n-2)(n-3)$,

$A_n^5 = n \cdot (n-1)(n-2)(n-3)(n-4), \ldots$

$\ldots, A_n^k = n \cdot (n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-(k-1))$.

или $A_n^k = n \cdot (n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-k+1)$.

Важно понимать структуру этой формулы и уметь применять при решении задач соответствующую словесную формулировку: число размещений из n элементов по k равно произведению k последовательных натуральных чисел, из которых наибольшим является n.

Например, число размещений из 16 элементов по 5 равно произведению 5 множителей, первый из которых 16, а каждый следующий на один меньше предыдущего, т.е.

$A_{16}^5 = 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 = 524160.$

Поскольку

$A_n^k = n \cdot (n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = \frac{n\cdot(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\ldots\cdot2\cdot1}{(n-k)(n-k-1)\ldots\cdot2\cdot1} =$
$= \frac{n!}{(n-k)!}$,

то $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Пример 13

(Закрепление изученного. К доске выходит ученик)

Найти все натуральные, удовлетворяющие условию: $A_n^2 = 6$.

Решение

$\frac{n!}{(n-2)!} = 6$, $n(n-1) = 6$,

$n^2 - n - 6 = 0$

$n_1 = 3, n_2 = -2 \notin N$

Ответ:$n = 3$.

Пример 14

(Решать задачу выходит ученик)

Сколько четырехзначных чисел, в которых нет одинаковых цифр, можно составить из цифр 0, 2, 4, 6, 8?[13]

Решение

Всего четырехзначных чисел можно составить столько, сколько существует размещений из 5 элементов по $4 - A_5^4$, но условию задачи не удовлетворяют комбинации цифр, начинающиеся нулем. Таких комбинаций будет A_4^3.

Вычитая их из общего числа размещений, получаем искомое

$A_5^4 - A_4^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (5-1) = 4^2 \cdot 3 \cdot 2 = 96.$

Пример 15

(Подготовка к ЕГЭ, слайд 12–13)

4. Контрольные вопросы

1. Перечислите три вида соединений.
2. Дайте определение перестановок из n элементов.
3. Понятие факториала (!).
4. Дайте определение размещений.
5. Приведите формулу для вычисления числа размещений.
6. Определение сочетаний из n элементов по .

5.Закрепление изученного, задание на уроках

§52, №1 (а, б); №2 (а, б); №3 (в, г); №4 (а, г); №5 (а, в); №6 (б, г); №8; №10 (а, б); №12 (в, г); №14; №16; №18; №20.

6. Задание на дом.

§52, №1 (б, г); №2 (в, г); №3 (а, б); №4 (б, в); №5 (б, г); №6 (а, в); №9; №10 (в, г); №12 (а, б); №15; №17; №19.

7. Подведение итогов уроков

Урок №3.Формула бинома Ньютона

Тип урока: комбинированный.

Цели:

образовательные: научить учащихся применять формулу бинома Ньютона;

воспитательные: воспитание умения слушать и вступать в диалог, участвовать в коллективном обсуждении проблем, интегрироваться в группу сверстников и строить продуктивное взаимодействие, настойчивости в достижении цели и заинтересованности в конечном результате труда;

развивающие: развитие умения анализировать, обобщать изучаемые факты, выделять и сравнивать существенные признаки, выбирать наиболее эффективные способы решения задач в зависимости от конкретных условий; рефлексия способов и условий действия; контроль и оценка процесса и результатов деятельности.

Методы обучения:

- словесные;
- наглядные.

Формы обучения:

- коллективная;
- индивидуальная.

Оборудование и дополнительные материалы: компьютер, проектор, презентация по теме «Формула бинома Ньютона», экран, учебник и задачник «Алгебра и начала математического анализа 10–11 классы» под редакцией А.Г. Мордковича.

План урока:

1) Организационный момент;
2) Повторение и закрепление пройденного материала;
3) Изучение нового материала;
4) Закрепление нового материала;
5) Итоги урока;
6) Домашнее задание.

Ход урока

1. Организационный момент

Приветствие учеников, сообщение темы и цели урока.

2. Повторение и закрепление пройденного материала

- Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
- Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Самостоятельная работа

1.Сколько различных четырехзначных чисел, в которых цифры не повторяются, можно составить из цифр 0, 3, 4, 8?
2.Из 24 участников собрания надо выбрать председателя, его заместителя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?
3. У Миши 8, а Вити — семь различных конфет. Сколькими способами мальчики могут поменяться пятью конфетами?

3. Изучение нового материала

Рассмотрим возведение в степень n двучлена(бинома) $a+b$, отметим определенные закономерности. Имеем:

При $n=0, (a+b)^0=1$;
При $n=1, (a+b)^1=(a+b)$;
При $n=2, (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;
При $n=3, (a+b)^3=a^3+3a^2+3ab^2+b^3$;
При $n=4, (a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$.

Прежде всего отметим, что при возведении бинома $a+b$ в степень n получаем однородный многочлен степени n.

Однородным многочленом степени n по переменным a и b называют многочлен, состоящий из одночленов той же степени n, т.е. из одночленов вида $a^{n-k}b^k$ (где $k=0,1,2,\ldots,n-1,n$). Например, при возведении во вторую степень $(a+b)^2$ получаем однородный многочлен той же степени $a^2+2ab+b^2$.

При этом коэффициенты при одночленах тоже связаны определенными закономерностями.

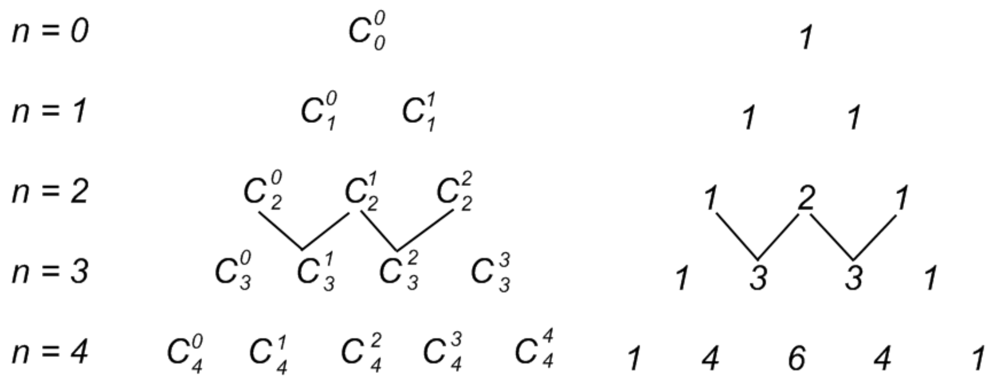
Докажем, что выполняется формула (формула бинома Ньютона):
$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\ldots+C_n^ka^{n-k}b^k+\ldots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+C_n^nb^n$
где C_n^k — число сочетаний из n элементов по k, т.е. $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

При возведении бинома $a+b^n$ надо n раз перемножить этот бином, т.е. $(a+b)(a+b)\ldots(a+b)$. Чтобы при раскрытии скобок получить одночлен вида

$a^{(n-k)}b^k$, нужно из n множителей вида a+b выбрать k множителей(порядок не важен.) тогда получим множитель b^k. Это можно сделать способами. При этом второй множитель $a^{(n-k)}$ получается автоматически.

Формула доказана.

Коэффициенты называют биноминальными. Они обладают рядом свойств, которые обсудим, рассмотрев треугольник Паскаля(составленную определенным образом таблицу).



1. В каждой строке находятся коэффициенты многочленов при возведении в степень n. Например, при $n = 3$ имеем коэффициенты $1, 3, 1$ одночленов в многочлене
$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
2. Каждое число равно сумме двух чисел, стоящих над ним в предыдущей строке. Например, $C_3^1 = C_2^0 + C_2^1$ (или $3 = 2 + 1$) и $C_3^2 = C_2^1 + C_2^2$. Эта закономерность указана линиями, другими словами, в общем виде выполняется равенство
$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.
3. Коэффициенты в строке симметричны относительно середины. Например, при $n = 3$ получили симметричные коэффициенты $1, 3, 3, 1$. В общем случае справедливо равенство:
$C_n^k = C_n^{k-1}$.
4. Крайние коэффициенты в каждой строке равны 1, т.к. $C_n^0 = 1$ и $C_n^n = 1$.

4. Закрепление нового материала у доски

Пример 1

Возведем бином $a + b$ в четвертую степень.

Решение

1)Учитывая формулу бинома Ньютона, выпишем структуру ответа:

$(a+b)^4 = \ldots a^4 + \ldots a^3b + \ldots a^2b^2 + \ldots ab^3 + \ldots b^4$

2)Используем треугольник Паскаля, вместо знака $\ldots$ расставим соответствующие биноминальные коэффициенты и окончательно получим:

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Аналогично поступают в случае более громоздких биномов.

Пример 2

Возведем бином $2x - 3y^2$ в куб.

Решение

Подобно предыдущему примеру, получим:

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Учтем, что в нашем случае $a = 2x$ и $b = -3y^2$.

Тогда получим:

$(2x - 3y^2)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2(-3y^2) + 3(2x)(-3y^2)^2 + (-3y^2)^3 =$
$= 8x^3 - 36x^2y^2 + 54xy^4 - 27y^6$.

Пример 3

Докажем, что сумма коэффициентов в строке треугольника Паскаля равна $2n$.

Доказательство

Другими словами, необходимо доказать, что справедливо равенство:

$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$.

Запишем формулу бинома Ньютона:

$(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^nb^n = 2^n$.

Теперь легко сообразить: чтобы в правой части этого равенства получилось сумма биноминальных коэффициентов, достаточно в равенство подставить значение $a = 1$, $b = 1$.Получим:

$2^n = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$

чтд

§53. №1,2,4.

5. Итог урока

Ученики делятся впечатлениями об уроке, обсуждают сложности, испытанные при изучении нового материала.

6.Домашнее задание

Повторить изученные на уроке понятия. §53. №3,6.

Урок №4. Связь элементов комбинаторики и вероятности

Тип урока: комбинированный.

Цели:

образовательные: научить учащихся применять формулы комбинаторики связанные с теорией вероятностей;

воспитательные: воспитание умения слушать и вступать в диалог, участвовать в коллективном обсуждении проблем, интегрироваться в группу сверстников и строить продуктивное взаимодействие, настойчивости в достижении цели и заинтересованности в конечном результате труда;

развивающие: развитие умения анализировать, обобщать изучаемые факты, выделять и сравнивать существенные признаки, выбирать наиболее эффективные способы решения задач в зависимости от конкретных условий; рефлексия способов и условий действия; контроль и оценка процесса и результатов деятельности.

Оборудование и материалы для урока: интерактивная доска, проектор.

Методы обучения:

- словесные;
- наглядные.

Формы обучения:

- коллективная;
- индивидуальная.

План урока:

1) Организационный момент;
2) Проверка домашнего задания;
3) Самостоятельная работа (проверочного характера);
4) Практикум по решению задач;
5) Домашнее задание.

Ход урока

1. Организационный момент

Приветствие учеников, сообщение темы и цели урока.

2. Проверка домашнего задания

Задача 1

В урне находятся 3 синих, 8 красных и 9 белых шаров одинакового размера и веса, неразличимых на ощупь. Шары тщательно перемешаны. Какова вероятность появления синего, красного и белого шаров при одном вынимании шара из урны?[20]

Решение

Так как появление любого шара можно считать равновозможным, то мы имеем всего $n = 3 + 8 + 9 = 20$ элементарных событий. Если через A, B, C обозначить события, состоящие в появлении соответственно синего, красного и белого шаров, а через m_1, m_2, m_3 — числа благоприятствующих этим событиям случаев, то ясно, что $m_1 = 3, m_2 = 8, m_3 = 9$. Поэтому $P(A) = \frac{3}{20} = 0,15$; $P(B) = \frac{8}{20} = 0,40$; $P(C) = \frac{9}{20} = 0,45$.

Задача 2

Наташа купила лотерейный билет, который участвует в розыгрыше 100 призов на 50000 билетов, а Лена — билет, который участвует в розыгрыше трех призов на 70000. У кого больше шансов выиграть?

Задание 3

В настольной игре потеряли кубик. Как заменить его с помощью разноцветных фишек?

Ответ: каждой стороне кубика определить цвет фишки.

3. Самостоятельная работа (проверочного характера)

Заполнить таблицу:

n — число возможных исходов испытания;

$A(m)$ — число исходов, благоприятствующих событию;

$P(A) = \frac{m}{n}$ — вероятность наступления события A.

4. Практикум по решению задач

Задача 1

Таня забыла последнюю цифру номера телефона знакомой девочки и набрала ее наугад. Какова вероятность того, что Таня попала к своей знакомой?

Решение

На последнем месте может стоять одна из 10 цифр: от 0 до 9. Значит,

$n = 10, m = 1, P(A) = \frac{1}{10}$.

Задача 2

На четырех карточках написаны буквы О, Т, К, Р. Карточки перевернули и перемешали. Затем открыли наугад последовательно эти карточки и положили в ряд. Какова вероятность того, что получится слово «КРОТ»?

Решение

Исходы — все возможные перестановки из четырех элементов (О, Т, К, Р); общее число исходов:

$n = P_4 = 4! = 24$

Событие $A = \{$после открытия карточек получится слово «КРОТ»$\}$:
$m_A = 1$ (только один вариант расположения букв — «КРОТ»)

$P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{1}{24}$.

Задача 3

На четырех карточках написаны цифры 1, 2, 3, 4. Карточки перевернули и перемешали. Затем открыли наугад последовательно три карточки и положили в ряд. Какова вероятность того, что в результате получилось: а) число 123; б) число 312 или 321; в) число, первая цифра которого 2?

Решение

Исходами опыта являются все возможные размещения четырех карточек на трех местах (порядок расположения важен). Общее число исходов:

$n = A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Рассмотрим события и их вероятности:
а) Событие $A =\{$из трех карточек образовано число 123$\}$, $m_A = 1$ (единственный вариант);

$P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{1}{24}$.

б) Событие $B =\{$ из трех карточек образовано число 312 и 321$\}$, $m_B = 2$ (два варианта размещения карточек);

$P(B) = \frac{m_B}{n} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$.

в)Событие $C =\{$из трех карточек образовано число, первая цифра которого 2$\}$. Если первая цифра фиксирована, то на оставшихся двух местах можно разместить любую из оставшихся трех цифр (с учетом порядка), то есть

$m_C = A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6; P(C) = \frac{m_C}{n} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$.

Задача 4

В ящике лежат 1 белый и три черных шара. Наугад вынимаются 2 шара. Какова вероятность того, что вынуты: 1) 2 черных шара; 2) белый и черный шар?

Решение

Исходы — все возможные пары шаров, выбираемые из четырех шаров в ящике; порядок выбора шаров не учитывается. Общее число исходов

$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 6$

1) Событие $A =${вынуты два черных шара};

$m_A = C_3^2 = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3; P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$

2) Событие $B =${вынуты белый и черный шары}; $m_B = C_1^1 \cdot C_3^1 = 1 \cdot 3 = 3$ (выбор белого, затем — черного);

$P(B) = \frac{m_B}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$

Задача 5

Случайным образом одновременно выбираются две буквы из 33 букв русского алфавита. Найдите вероятность того, что:

1) обе они согласные;

2) среди них есть «ъ»;

3) среди них нет «ъ»;

4) одна буква гласная, а другая согласная.

Решение

Исходы — все возможные пары букв русского алфавита без учета порядка их расположения; общее число возможных исходов

$n = C_{33}^2 = \frac{33!}{2! \cdot (33-2)!} = \frac{32 \cdot 33}{1 \cdot 2} = 528.$

Рассмотрим события:

1) A={ обе выбранные буквы — согласные}. Поскольку в русском языке 21 согласная буква, 10 гласных и 2 буквы («ь», «ъ») не обозначающие звуков), то событию A благоприятствует

$m_A = C_{21}^2 = \frac{21!}{2! \cdot 19!} = \frac{20 \cdot 21}{1 \cdot 2} = 210$ исходов.

$P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{210}{528} = \frac{35}{88} \approx 0,40.$

2) B={среди выбранных букв есть «ъ»}. Выбор твердого знака C_1^1, выбор второй буквы из оставшихся C_{32}^1.

$m_B = C_1^1 \cdot C_{32}^1 = 1 \cdot 32 = 32; P(B) = \frac{m_B}{n} = \frac{32}{528} = \frac{2}{33} \approx 0,06.$

3) C={среди выбранных букв нет «ъ»}.

$m_C = C_{32}^2 = \frac{31 \cdot 32}{1 \cdot 2} = 496; P(C) = \frac{m_C}{n} = \frac{469}{528} = \frac{31}{33} \approx 0,94.$

4) D={среди выбранных букв одна буква гласная, а другая согласная}.

$m_D = C_{10}^1 \cdot C_{21}^1 = \frac{10!\cdot 21!}{9!\cdot 20!} = 10 \cdot 21 = 210; P(D) = \frac{m_D}{n} = \frac{210}{528} = \frac{35}{88} \approx 0,40.$

5. Домашнее задание

Задача 1

Набирая номер телефона, состоящий из 7 цифр, абонент забыл, в какой последовательности идут три последние цифры. Помня лишь, что это цифры 1, 5 и 9, он набрал первые четыре цифры, которые знал, и наугад комбинацию из цифр !, 5 и 9. Какова вероятность того, что абонент набрал правильный номер?

Решение

Исходы — перестановки из трех элементов (1, 5, 9); общее число исходов: $n = P_3 = 3! = 6.$

Событие A={абонент набрал верный номер}; $m_A = 1$
$P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{1}{6}.$

Задача 2

На каждой карточке написана одна из букв О, П, Р, С, Т. Несколько карточек наугад выкладывают одну за другой в ряд. Какова вероятность, что при выкладывании:

а) 3-х карточек получится слово РОТ;

б) 4-х карточек получится слово СОРТ;

в) 5–ти карточек получится слово СПОРТ?

Решение

Исходами опыта будут расположения выбранных карточек в определенном порядке, то есть размещения $A^k m$.

Исходное множество содержит $m = 5$ элементов.

Обозначим буквами A, B, C случайные события, указанные в условии задачи. Найдем их вероятности.

а) Выбираются 3 карточки, $k = 3$, общее число исходов

$n = A_5^3 = \frac{5!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60; m_A = 1, P(A) = \frac{1}{60}.$

б)$n = A_5^4 = \frac{5!}{(5-4)!} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120, m_B = 1, P_B = \frac{m_B}{n} = \frac{1}{120}.$

в)$n = A_5^5 = \frac{5!}{(5-5)!} = \frac{5!}{(5-5)!} = \frac{5!}{(5-5)!} = \frac{5!}{0!} = \frac{5!}{1} = 120, m_C = 1, P(C) = \frac{m_C}{n} = \frac{1}{120}.$

Задача 3

В пачке находятся одинаковые по размеру 7 тетрадей в линейку и 5 в клетку. Из пачки наугад берут 3 тетради. Какова вероятность того, что все три тетради окажутся в клетку?

Решение

Общее число возможных исходов

A={все три тетради в наборе — в клетку}.

$m_A = C_{27}^3 \cdot C_5^2 = \frac{4\cdot5}{1\cdot2} = 1010; P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{10}{220} = \frac{1}{22} \approx 0,045.$

Дополнительные задачи

Задача 1

Четыре билета на елку распределили по жребию между 15 мальчиками и 12 девочками. Какова вероятность того, что билеты достанутся 2 мальчикам и 2 девочкам?

Решение

$n = C_{27}^4 = \frac{24\cdot25\cdot26\cdot27}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 17550;$

$m_A = C_{15}^2 \cdot C_{12}^2 = \frac{14\cdot15}{1\cdot2} \cdot \frac{11\cdot12}{1\cdot2} = 6930; P(A) = \frac{6930}{17550} = \frac{77}{195} \approx 0,39.$

Задача 2

Случайно нажимают три клавиши из одной октавы. Найдите вероятность того, что:

1) звучат ноты «си» и «до»;

2) не звучит нота «фа»;

3) звучит нота «ля»;

4) получится до-мажорное звучание.[21]

Решение

Исходами являются все наборы по 3 клавиши из 7 имеющихся в октаве; порядок расположения клавиш в наборе не учитывается.

Общее количество исходов $n = C_7^3 = \frac{5\cdot6\cdot7}{1\cdot2\cdot3} = 35.$

1) $A =\{$ звучат ноты «си» и «до»$\}$. К двум клавишам добавляют третью — любую из 5 оставшихся,

$m_A = C_5^1 = 5; P(A) = \frac{5}{35} = \frac{1}{7} \approx 0,14.$

2) $B =\{$ не звучит нота «фа»$\}$. Выбираем три клавиши из шести, исключая «фа»,

$m_B = C_6^3 = 20; P(B) = \frac{20}{35} = \frac{4}{7} \approx 0,57.$

3) $C =\{$звучит нота «ля»$\}$. Выбираем две клавиши из шести, исключая «ля»,

$m_C = C_6^2 = 15; P(C) = \frac{15}{35} = \frac{3}{7} \approx 0,43.$

4) $D =\{$получилось до-мажорное звучание$\}$; $m_D = 1$ (должны быть нажаты

три соседние клавиши в начале октавы, единственный вариант).

$P(D) = \frac{1}{35} \approx 0,03.$

Урок №5. Контрольная работа по теме «Элементы комбинаторики. Начала теории вероятностей»

Тип урока: контроль знаний.

Цели:

образовательные: проверить качество усвоения пройденного материала учащимися;

воспитательные: воспитание чувства ответственности, самостоятельности, настойчивости в достижении цели и заинтересованности в конечном результате труда;

развивающие: развитие умения анализировать, обобщать изучаемые факты, выделять и сравнивать существенные признаки, выбирать наиболее эффективные способы решения задач в зависимости от конкретных условий; рефлексия способов и условий действия; контроль и оценка процесса и результатов деятельности.

Методы обучения:

-самостоятельная работа.

Формы обучения:

- фронтальная.

Оборудование и дополнительные материалы: раздаточный материал.

План урока:

1) Организационный момент;
2) Вопросы по домашнему заданию;
3) Контрольная работа(приложение1);
4) Итоги урока.

Ход урока

1. Организационный момент

2. Вопросы по домашнему заданию

3. Контрольная работа

4. Итоги урока

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проделанной работы были решены следующие *задачи*:

• изучена и проанализирована учебно-методическая, психолого-педагогическая, учебная литература по теме работы;

• проведен анализ заданий, содержащих элементы комбинаторики и теории вероятностей, в Едином Государственном Экзамене;

• разработаны методические рекомендации по теме «Комбинаторика и вероятность»;

• исследованы психолого-педагогические аспекты, изучения комбинаторики и вероятности;

• разработано тематическое планирование по теме «Комбинаторика и вероятность»;

• разработаны уроки по теме «Комбинаторика и вероятность»;

• создано учебно-методическое электронное пособие по теме исследования.

Практическая значимость выпускной квалификационной работы определена тем, что разработанное тематическое планирование, электронное пособие, уроки и методические рекомендации по теме «Случайные события и их вероятности», могут быть использованы учителями средних школ, а также студентами при самостоятельной подготовке к практическим занятиям по методике преподавания математики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрамова, Г. С. Возрастная психология : учеб. пособие для вузов. — М.: Академический проект, 2002. — 234 с.

2. Рослова, Л.О. Настольнаяя книга учителя математики: Справочно-методическое пособие. — М.: ,2004. — 429 с.

3. Ершова, А.П., Голобородько В.В. Вся школьная математика в самостоятельных работах. — М.: ,2010. — 640 с.

4. Буренок, И.И., Туйбаева, Л.И., Цедринский, А.Д. Психолого-педагогические и методические аспекты урока математики. — М.: , 2000. — 72 с.

5. Гнеденко, Б.В. Курс теории вероятностей. — М.: Наука, 1965. — 453 с.

6. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Высшая школа, 2000. — 479 с.

7. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. — М.: Высшая школа, 2001. — 400 с.

8. Бродский, Я.С. Статистика. Вероятность. Комбинаторика. — М.: Оникс, 2008. — 544 с.

9. Дорофеев, Г.В. Математика. 6 класс. — М.: Ювента, 2010. — 112 с.

10. Макарычев, Ю.Н., Миндюк, Н.Г. Алгебра: учебн. пособие для 7-9 класса. — М.: Просвещение, 2003. — 283 с.

11. Дорофеев, Г.В. Математика. 8 класс. — М.: Издательство Ювента, 2010. — 149 с.

12. Дорофеев, Математика. 9 класс. — М.: Ювента, 2011. — 198 с.

13. Мордкович, А.Г. Математика. 7 класс. — М.: Мнемозина, 2009. — 160 с.

14. Мордкович А.Г. Математика. 8 класс. — М.: Мнемозина, 2008. — 240 с.

15. Мордкович, А.Г. Математика. 9 класс. — М.: Мнемозина, 2008. — 255 с.

16. Мордкович, А.Г. Алгебра и начала анализа. 10-11 классы. — М.: Мнемозина, 2009. — 399 с.

17. Никольский, С.М. Алгебра: учеб. для 7 класса. — М.: Просвещение, 2005. — 285 с.

18. Никольский, С.М. Алгебра: учеб. для 8 класса. — М.: Просвещение, 2004. — 287 с.

19. Никольский С.М. Алгебра: учеб. для 9 класса. — М.: Просвещение, 2006. — 255 с.

20. Никольский, С.М., Потапов, М.К. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. — М.: Просвещение, 2009. — 430 с.

21. Никольский, С.М., Потапов, М.К. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. — М.: Просвещение, 2009. — 464 с.

22. Подласый, И.П. Педагогика. — М.: Владос, 2000. — 576 с.

23. Тюрин, Ю.Н., Макаров, А. А., Высоцкий, И. Р., Ященко, И. В. Теория вероятностей и статистика: Методическое пособие для учителя — М.: МЦНМО: Московские учебники, 2008. — с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Самостоятельная работа к уроку №4.

№	Испытание	n	Событие A	A(m)	$P(A)$
1	Подбрасывание игрального кубика	6	Выпавшее число очков нечетно	3	$\frac{1}{2}$
2	Подбрасывание игрального кубика	6	Выпавшее число очков кратно трем	2	$\frac{1}{3}$
3	Раскручивание стрелки рулетки, разделенной на 8 равных секторов, занумерованных числами от 1 до 8	8	Остановка стрелки на секторе с номером, кратным 4	2	$\frac{1}{4}$
4	Игра в лотерею (1500 билетов, из которых 120 выигрышных)	1500	Выиграли, купив один билет	120	$\frac{2}{25}$
5	Случайный выбор двузначного числа	90	Число состоит из одинаковых цифр	9	$\frac{1}{10}$

Контрольная работа к уроку №5.

I вариант	**II вариант**	**Баллы**
Задача 1 Сколькими способами можно составить пятизначное число из цифр $1, 3, 5, 7, 9$? Выберите подходящие варианты ответа: А) 720 Б) 120 В) 5! Г) другой ответ	**Задача 1** Сколькими способами можно расставить на полке 6 книг разных авторов? Выберите подходящие варианты ответа: А) 6! Б) 120 В) 720 Г) другой ответ	1 балл
Задача 2 Сколькими способами можно выбрать двух дежурных из 20 человек?	**Задача 2** Сколькими способами можно выбрать 3 разные краски из 5 разных красок?	1 балл
Задача 3 Сколькими способами можно из 30 человек назначить председателя и секретаря?	**Задача 3** Сколькими способами можно из 20 человек назначить двух дежурных, один из которых — старший?	1 балл
Задача 4 Во взводе 5 сержантов и 30 солдат. Сколькими способами можно выбрать наряд из двух сержантов и трёх солдат?	**Задача 4** Из 11 роз и 6 гербер нужно составить букет, в котором 3 розы и 2 герберы. Сколько разных букетов можно составить?	1,5 балла
Задача 5 Разложить выражение по формуле бинома Ньютона $(2m^2 - n^4)^5$	**Задача 5** Разложить выражение по формуле бинома Ньютона $(k^6 - 3d^2)^4$	1,5 балла

Задача 6 В шкатулке лежат 10 шаров: 2 белых, 5 зеленых и 3 красных. Наугад вытягивают 3 шара. Найдите вероятность указанных событий и установите соответствие (Например, вопросу (А) соответствует ответ (1) и т.д.) А) 3 шара зеленых, Б) 1 красный 2 белых, В) 2 зеленых 1 белый, Г) все шары разного цвета. 1) другой ответ, 2) $\frac{1}{8}$, 3) 25%, 4) $\frac{1}{6}$, 5) $\frac{1}{12}$.	**Задача 6** В шкатулке лежат 11 шаров: 5 белых, 4 зеленых и 2 красных. Наугад вытягивают 3 шара. Найдите вероятность указанных событий и установите соответствие (Например, вопросу (А) соответствует ответ (1) и т.д.) А) 3 шара зеленых, Б) 1 красный 2 белых, В) 2 зеленых 1 белый, Г) все шары разного цвета. 1) $24,24\%$, 2) $\frac{4}{165}$, 3) другой ответ, 4) $\frac{4}{33}$, 5) $\frac{2}{11}$.	за каждый пункт 1,5 балла

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Дидактический материал

Вариант A_1**.** (Уровень А соответствует обязательным программным требованиям.)

Задача 1.

Из 30-томного собрания сочинений Льва Толстого ученик наугад выбирает один том. Какова вероятность того, что:

а) в этом томе окажется роман «Анна Каренина», изданный в одном томе;

б) этот том будет иметь четный номер?

Задача 2.

Бросает две одинаковые монеты. Какова вероятность того, что

выпадут ***«орёл»*** и ***«решка»***?

Задача 3.

Из букв слова «провал» наугад выбираются 5 букв. Найдите вероятность того, что из выбранных букв можно будет составить слово ***«право».***

Задача 4.

Из 28 костей домино наугад выбирают одну. Что вероятнее:

что сумма цифр на ней будет равна 6 или 8?

Вариант A_2 (Уровень А соответствует обязательным программным требованиям.)

Задача 1.

Из 30-томного собрания сочинений Льва Толстого ученик наугад выбирает один том. Какова вероятность того, что:

а) в этом томе окажется роман «Война и мир», изданный в двух томах;

б) этот том будет иметь нечетный номер?

Задача 2.

Бросает две одинаковые монеты. Какова вероятность того, что

выпадут два ***«орла»*** ?

Задача 3.

Из букв слова «провал» наугад выбираются 5 букв. Найдите вероятность того, что из выбранных букв можно будет составить слово ***«повар».***

Задача 4.

Из 28 костей домино наугад выбирают одну. Что вероятнее:

что сумма цифр на ней будет равна 3 или 4?

Вариант B_1 (средний уровень сложности)

Задача 1.

Какова вероятность того, что ваш будущий ребенок:

а)родится в апреле;

б)родится 30-го числа?

Задача 2.

Два одинаковых игральных кубика бросают поочередно. Какова вероятность того, что сумма выпавших чисел будет равна 3?

Задача 3.

Из букв слова ***«апельсин»*** последовательно выбирают 4 буквы. Найдите вероятность того, что выбранные буквы в порядке их выбора образуют слово ***«лиса».***

Задача 4.

Что вероятнее при бросании двух одинаковых игральных кубиков:

что выпавшая сумма будет равна 6 или что она будет больше 10?

Вариант B_2 (средний уровень сложности)

Задача 1.

Какова вероятность того, что ваш будущий ребенок:

а)родится в январе;

б)родится 31-го числа?

Задача 2.

Два одинаковых игральных кубика бросают поочередно. Какова вероятность того, что сумма выпавших чисел будет равна 11?

Задача 3.

Из букв слова ***«апельсин»*** последовательно выбирают 4 буквы. Найдите вероятность того, что выбранные буквы в порядке их выбора образуют слово ***«плен».***

Задача 4.

Что вероятнее при бросании двух одинаковых игральных кубиков:

что выпавшая сумма будет равна 10 или что она будет меньше 4?

Вариант C_1 (высокий уровень сложности)

Задача 1.

Из 28 костей домино выбирают одну. Какова вероятность того, что:

а) сумма цифр на ней меньше 3;

б)обе цифры на ней – четные?

Задача 2.

В ящике лежит 15 шаров, из которых 5 - черные. какова вероятность того, что при выборе из ящика трех шаров один окажется черным?

Задача 3.

Из букв слова ***«комбинаторика»*** наугад выбираются 4 буквы. Найдите вероятность того, что из выбранных букв можно составить слово ***«корт».***

Задача 4.

В колоде 32 карты. Что вероятнее:

найти среди четырех выбранных карт ровно два туза или все четыре карты черные?

Вариант C_1 (высокий уровень сложности)

Задача 1.

Из 28 костей домино выбирают одну. Какова вероятность того, что:

а) сумма цифр на ней больше 9;

б)обе цифры на ней – нечетные?

Задача 2.

В ящике лежит 15 шаров, из которых 5 - черные. какова вероятность того, что при выборе из ящика трех шаров два окажутся черными?

Задача 3.

Из букв слова ***«комбинаторика»*** наугад выбираются 4 буквы. Найдите вероятность того, что выбранные буквы в порядке их выбора образуют слово ***«атом».***

Задача 4.

В колоде 32 карты. Что вероятнее:

найти среди четырех выбранных карт ровно одну даму или ровно две красные карты?